

59 h/1
MISCELLANEA

ANALYTICA

DE

SERIEBUS

ET QUADRATURIS.

ACCESSERE

Variae Considerationes de Methodis Comparationum, Combinationum & Differentiarum, Solutiones difficultatum aliquot Problematum ad Sortem spectantium, itemque Constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum quae in motibus Corporum caelestium occurrunt.

L O N D O N

Excudebant J. T O N S O N & J. W A T T S.

M D C C X X X.

RECEIVED
JAN 10 1861
M I G W O R

1861

RECEIVED
JAN 10 1861
M I G W O R

RECEIVED
JAN 10 1861
M I G W O R



RECEIVED
JAN 10 1861
M I G W O R



SPECTATISSIMO VIRO

MARTINO FOLKES,

ARMIGERO,

S. P. D.

A. DE MOIVRE.



PHIL mihi unquam optatus fuit, vir
præstantissime, quam ut occasionem
nanciscer meam erga te observantiam
palam testandi, simul & studiorum me-
orum fructus aliquot tibi dicandi, quos
non indignos censes qui a te benigne
exciperentur. Nemo, qui consuetudine tua utitur, ne-
scit quantam in Scientia Mathematica operam posueris,
quam felici successu eam sis prosecutus, quos usus tibi
inde derivaveris, sive ad perpoliendum illud ingenium
quod natura tibi dedit acerrimum, sive ad Philosophiæ
naturalis Leges perscrutandas, sive ad optimarum Ar-
tium, fere quotquot sunt, cognitionem tibi compa-
randam.

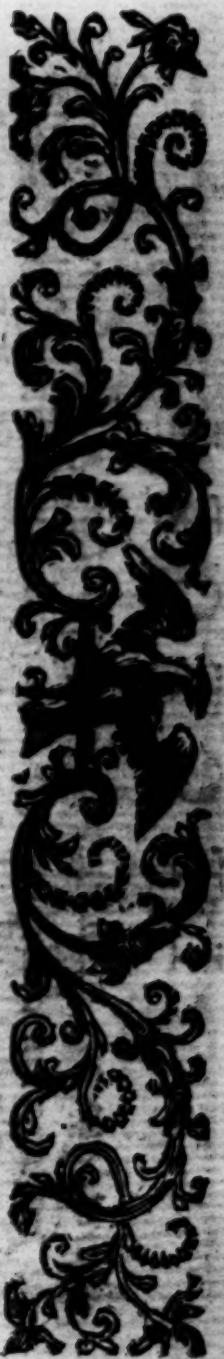
DE DICATIO.

randam. Ea vero qua decoraris Doctrina, Munus illud toties tibi a *Newtono*, cui bene cognitus eras, demandatum, ut vicem suam in Societate Regia impleres, Dignitas quâ hanc personam constanter sustinisti; hæc, ne humanitatem tuam, affabilitatem, ceterasque animi tui dotes memorem, summopere me urgent, immò impellunt, ut speculationes has meas exquisito tuo iudicio exponam, quæ si tibi probentur, propositum assecutus fuero. Non hic quidem id genus Problemata reperies quibus Naturæ vires expenduntur, sed cum ii qui hac ætate inter Mathematicos maxime floruerunt, quoviam ad majora sibi sternerent, Doctrinam Serierum & Quadraturarum summo studio excoluerint, spero rem non ingratam me facturum, si pauca quadam ostendero eo spectantia ut quæ in hoc genere præsertim requiruntur, aliquanto faciliora evadant. Quanquam vero, ex his aliqua satis facile mihi fuerint arcessita, quin etiam ultro se in conspectum dederint, attamen cum id non raro eveniat, ut quæ sub oculos cadunt non continuo advertantur; eam laudem, si qua laus est, non fastidiose respiciam quæ fortasse hinc mihi emerget, quod pauca casu perceperim ab aliis prætermissa; qualiscunque autem horum mihi obtigerit exitus, in eo libenter acquiescam, si Tu, cum te fautorem assiduum præbeas eorum omnium qui ad id nituntur ut prodesse possint, eo nomine me benevolentia tua complecti velis.

Jan. 7^o 17²⁹.
30.



LECTORI



LECTORI

S.



Ommodo tuo me consultum putavi, Lector, si Demonstrationes primi Libri in Librum proxime insequentem, ad instar Scholii scriptum rejicerem, ubi eas fuisse & quam fieri potuit dilucide tractatas reperies; illud autem praesertim in causa fuit cur hanc viam stricte tenerem, quod cum animadvertissem Demonstrationes Propositionibus vulgo subjectas, saepius obflare quominus meus ad Propositiones sequentes satis expedite se flectere posset, ut earum connexionem penitus perspiceret, easque uno quasi intuitu complecteretur, nihil tibi magis profuturum censerim quam si, Demonstrationibus ad tempus aliquod posthabitis, id unice perpenderes, utrum Conclusiones, ex principiis jam positis & tanquam concessis deductae, pro legitimis haberi possint; quo observato, connexio Propositionum inter se melius percipietur, tum etiam paratior erit aditus ad Demonstrationes assequendas. Quamquam vero haec procedendi ratio perraro a Geometris usurpetur, attamen eam Cl. NEWTONO non displicuisse sensisti; etenim cum ei Theoremata praecipua quae Lemmatibus primi Libri superstruuntur * conspicienda dedissem, eique generatim exposuissem quae fuerat mea demonstrandi ratio, eam aliquando satis commode adhiberi posse fassus est, modo Enunciatum Propositionis ita esset per se clarum ut Demonstrationis adjumento non indigeret,

* 14 Jan. 1723.

LECTORI.

digeret, quo vis verborum melius caperetur; in hac vero sententia me firmaverunt doctissimi & amicissimi Viri D. Sanderfon, Geometriae Professor apud Cantabrigienses, & Rev. D. Collon, quorum uterque mihi de iis mentem suam candidissime aperuit, quorumque consiliis me plurimum debere libentissime agnosco. Ceterum non alium esse censeo iis obviam ire qui id mihi fortasse virio vident, quod Problemata primi Libri in plures partes quam necesse erat distribuere, utpote quae ad sex aut septem videbantur redigi posse; quibus id responsum velim, horum Problematum numerum ideo fuisse auctum, ut eorum solutiones munere Canonum fungerentur, atque propterea nihil melius me facturum putasse, quam si ea ita ab omni ambiguitate liberarem, ut ad usum maxime idonea redderem; quod quidem non tam commode fieri poterat, nisi suum cuique locum distincte assignassem. Illud praeterea me movit ut alia quaedam paululum dilatarem, quod cum Theorema meum de Sectione Anguli, quo fere mitius Doctrina tota primi Libri, demonstratione sua nudatum, Societati Regiae * protulissem, multi ex hoc tempore me incitavit ut tum illud Theorema tum cetera, quae ad eundem scopum pertinent, copiose explicarem, nec senerem quidquam dubii in re nova relinqui, quorum desultorio recusare non potui quin pro viribus meis obtemperarem.

* 15 Novemb. 1722.



INDEX CAPITUM

TOTIUS OPERIS.

LIBER I.

De Ordinatis Rationalibus in simpliciores resolvendis.

LIBER II.

Scholium ad precedentia.

CAP. I. Theorema novum de sectione Anguli demonstratur. Pag. 13

CAP. II. De natura Serierum recurrentium. 26

LIBER III.

CAP. I. De Fluente quantitatis $\frac{x^{20}z}{1+2x^{12}+x^{20}}$. 43

CAP. II. Quaedam attinguntur de Comparatione Curvarum cum
Genicis Sectionibus. 56

CAP. III. De Ordinatis quibusdam Irrationalibus ad Rationali-
tatem redigendis. 63

CAP. IV. De Multinomiis quibusdam in Binomia aut Trinomia
resolvendis. 67

LIBER IV.

CAP. I. De Summis Serierum recurrentium. 72

CAP. II. De invenendis Seriei Terminis. 83

CAP. III. De Pseudo-trinomio. 92

LIBER

INDEX CAPITULUM.

L I B E R V.

De Binomio $a + b$ ad Potestatem permagnam erecto.

CAP. I. *Excerpta quaedam ex Jac. & Nic. Bernoulli circa Binomium ad potestatem permagnam erectum.* P. 96

CAP. II. *De inventione mediae Coefficientis Binomii, itemque de eius comparatione cum Coefficiente Terminum cuiuslibet dati.* 102

CAP. III. *De Maximo Termino Binomii ad potestatem integram erecti.* 107

CAP. IV. *De Puncto Inflexus in Binomio.* 106

L I B E R VI.

De Seriebus Hyperbolicis, Circularibus, Mixtis & Determinatis.

CAP. I. *De inventione Serierum quae summari possint.* 112

CAP. II. *De regressu a Serie data ad summam, qua occasione ea demonstrantur quae de Maximo Binomii Terminum dicta fuerant.* 123

CAP. III. *De Seriebus determinatis.* 129

L I B E R VII.

Responsio ad quasdam Criminaciones.

CAP. I. *Causa Libri septimi exponitur.* 146

CAP. II. *De Metodo Differentiarum, in qua exhibetur Solutio Stirlingiana de media Coefficiente Binomii.* 170

CAP. III. *De Metodo Combinationum.* 176

CAP. IV. *De Permutationibus.* 182

CAP. V. *Combinationes & Permutationes ulterius considerate.* 184

CAP. VI. *De Numero Punctorum in Tesseriis.* 191

CAP. VII. *Solutiones variorum Problematum ad Sortem spectantium.* 199

L I B E R VIII.

De viribus Centripetis, itemque de maximis & minimis mutationibus quae in motibus Corporum caelestium occurrunt. 233

LIBER





LIST of the

SUBSCRIBERS.

HIS Grace the Duke of St. Albans.

His Grace the Duke of Argyll.

John Arbuthnot, *M. D.*

Thomas Archer, *Esq.*

B

RT. Hon. Lord Berkeley of Stratton.

Rt. Hon. Lord Bathurst.

Bennet Coll. Library.

Mr. H. Berenger de Beaufort.

Mr. Joseph Billio.

Mr. John Blackwell, *Gr. Prof. at* Aberdeen.

Charles Du Bois, *Esq.*

Mr. Michel Bouyer.

Rev. James Bradley, *M. A.*

Pr. Sav.

Mr. Charles Brent.

Rev. William Braine, *D. D.*

Noel Broxholme, *M. D.*

Sir John Buckworth, *Barl.*

James Burroughs, *Esq.*
John Buffiere, *Esq.*

HIS Grace the Duke of Chandos.

Rt. Hon. Lord James Cavendish.

Rt. Hon. Lord Charles Cavendish.

Rt. Hon. Lord Cornwallis.

Mr. George Campbell.

George Cheyne, *M. D.*

Robert Clarke, *Esq.*

Anthony Collins, *Esq.*

Rev. John Colson, *M. A.*

John Conduit, *Esq.*

Edward Cook, *Esq.*

Mr. John Coppindal, of Trin. Coll. Cambr.

Rev. Corterel, Dean of Raphoe.

Clare-Hall Library.

Rev. John Craig.

John Crew, *Esq.*

Sir Alexander Cumming, *Barl.*

D.

HIS Grace the Duke of Devon-
shire.

HIS Grace the Duke of Dorset.

Peter Daval, *Esq;*
Daniel Dering, *Esq;*
Hon. Edward Digby, *Esq;*
James Douglas, *Esq;*
Daniel Duncan, *M. D.*
Mr. Samuel Durham.

E.

R^T Hon. Richard Edgecomb, *Esq;*

Mr. John Eden.
John Elde, *Esq;*
Emanuel College Library.
Francis Eyles, *Esq;* of Benn. Coll.

F.

F Rancis Fauquieres, *Esq;*
Coulson Fellows, *Esq;* 5
Martin Fellows, *Esq;*
William Fellows, *Esq;*
West Fenton, *Esq;* 2
Martin Folkes, *Esq;* 7
William Folkes, *Esq;*
Thomas Folkes, *Esq;*
Sir John Fortescue, *Knt.* 2
Henry Furnese, *Esq;* 2
Capt. George Furnese.
John Friend, *M. D.*

G.

HIS Grace the Duke of Grafton.
Thomas Garnier, *Esq;*
Mr. George Graham.
Robert Gray, *Esq;*

Mr. Green, of Benn. Coll.

Mr. James Gregory, *Math. Prof.*
Edinb.

Mr. Isaac Guion.

H.

John Hadley, *Esq;*
William Hanbury, *Esq;*
John Hanbury, *Esq;*
James Hammond, *Esq;*
Richard Hassel, *Esq;*
John Hedges, *Esq;*
John Herring, *Esq;*
Benjamin Hoadley, *M. D.*
Rev. Mr. Henry Holmes, of Trin.
Col. Camb.
Mr. Gervase Holmes, of Em. Col.
Mr. Stephen Horsman.
Hon. Edward Howard, *Esq;*
Robert Hucks, *Esq;* 3
Archibald Hutchinson, *Esq;*

I.

R^T Hon. Lord May.
William Jones, *Esq;*
Rev. Mr. Jackson.
Mr. William Innys.
James Jurin, *M. D.* 4

K.

K Ing's Coll. Library.
B. P. Knight, *Esq;*
John Knight, *Esq;*
Mr. Klिंगenstierna, *Math. Prof.*
at Upsall.
Rt.

L.

R T. Hon. Earl of Lincoln,
Rt. Hon. Lord Vis. Londale.
Rt. Hon. Lord Lynne.
Mr. Colin Mac Laurin, *Math.*
Profes. Edinb.
Isaac Debeup, *Esq;*

HIS Grace the Duke of Mon-
tague
His Grace the Duke of Manchester.
Rt. Hon. Lord Monson.
Mr. John Machin, *Mr. Pr. Gr.*
Sec. R. S.

Nicolas Man, *Esq;*
Mr. de Maupertuis, *Acad. Par.*
& R. S. S.
Richard Mead, *M. D. Med. Reg.*
Abraham Meure, *Esq;*
Edward Montague, *Esq;*
Col. John Montague.
Rev. Charles Morgan, *D. D. Ma-
ster of Clare-Hall.*

N.

HIS Grace the Duke of New-
castle.
Hen. John Noel, *Esq;*
Rev. William Nicolls, *D. D. Vi-
car of St. Giles Crip.*

R T. Hon. Earl of Oxford,
Crew Offey, *Esq;*
Robert Ord, *Esq;*
Mr. Edmund Overall.
James Ord, *Esq;*

P. Hon. Lord Pailley.

R T. Hon. Lord Pailley.
Rt. Hon. Lord Parker.
Rt. Hon. Lord Percival.
Mr. Parker, *Fellow of Ry. Coll.*
Cambr.

Robert Paul, *Esq;*
Edward Pawlet, *Esq;*
Hon. Henry Pelham, *Esq;*
Thomas Pellet, *M. D.*
Henry Pemberton, *M. D. Med.*
Pr. Gresh.
Henry Plumpton, *M. D.*
His Excell. Stephen Poincz, *Esq;*
Uvedale Price, *Esq;*

R.

HIS Grace the Duke of Rich-
mond.
Andrew Ramfay, *Esq;*
John Robartes, *Esq;*
Mr. Benjamin Robins.

S.

R T. Hon. Robert Earl of Sun-
derland.
Rt. Hon. Earl of Suffex.
Rt. Hon. Lady Diana Spencer.
Nicolas Sanderfon, *L. L. D. Math.*
Prof. Luc.
Exton Sayer, *L. L. D. Chanc. of*
Durham.
Hon. Augustus Schutz, *Esq;*
John Selwin, *Esq;*
Mr. James Sherard.
Skeen of Skeen, *Esq;*
Robert Smith, *L. L. D. Math.*
Prof. Plum.
Mr.

Mr. Ralph Snow,
James Stevens, *Esq*;
Charles Steurt, *M. D.*
Mr. James Stirling.

T.

R T. Hon. Lord Viscount Townshend
Rt. Hon. Lord Trevor.
Brook Taylor, *L. L. D.*
Hon. Henry Temple, *Esq*; *mod* T
Rev. Andrew Took, *M. A.*
Hon. Thomas Townshend, *Esq*;
Hon. William Townshend, *Esq*;
Trinity Coll. Library. Camb.

Marquis Visconti.

W.

R T. Hon. Earl of Winchelsea.
Rt. Hon. Sir Robert Walpole,
Knt. of the Garter.
Edward Walpole, *Esq*;
Sir William Willis, *Barr*;
James Wilson, *M. D.*
Thomas Windham, *Esq*;
John White, *Esq*;
Thomas Woodcock, *Esq*;
Thomas Woodford, *Esq*;





MISCELLANEA ANALYTICA.

LIBER PRIMUS.

De Ordinatis rationalibus in Simpliciores

resolvendis.

LEMMA I.

Si sint l & x Cosinus Arcuum duorum A & B , quorum uterque eodem Radio r describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus n ad Unitatem, tunc erit

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}}}{\sqrt{l - \sqrt{l^2 - 1}}}$$

COROLLARIUM I.

Pone $\sqrt{l + \sqrt{l^2 - 1}} = z$, hinc erit $z^n = l + \sqrt{l^2 - 1}$, seu $z^n - l = \sqrt{l^2 - 1}$, five, quadratis utrinque paribus, $z^{2n} - 2lz^n + l^2 = l^2 - 1$; de-
leisque hinc inde aequalibus, & facta transpositione, erit $z^{2n} - 2lz^n$
B
+ 1

$+1=0$; jam ex eo quod possum fit $\sqrt{1+\sqrt{11-1}}=z$, erit ex superiore Lemmate $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}$, sive $xx-2xz+1=0$.

COROLLARIUM II.

Quapropter si ex Aequationibus binis $1-2/z^2+x^2=0$, $1-2xz+x^2=0$, expellatur Quantitas z , tunc orietur Aequatio nova qua definitur relatio inter Cosinus l & x , modo intelligatur Arcus A esse Quadrante minor.

COROLLARIUM III.

At si Arcus A sit Quadrante major, tunc Cosinus ejus erit $-l$, quo fiet ut Aequationes evasurae sint $1+2/z^2+x^2=0$, $1-2xz+x^2=0$, e quibus si expungatur z , orietur Aequatio nova qua exprimitur relatio inter Cosinus l & x .

COROLLARIUM IV.

Atque adeo, si ex Aequationibus binis $1+2/z^2+x^2=0$, $1-2xz+x^2=0$ expellatur quantitas z , hinc orietur Aequatio nova qua definitur relatio inter Cosinum Arcus A Quadrante minoris vel majoris (pro ut l Signo negativo vel affirmativo afficietur,) & Cosinus omnes Arcuum $\frac{1}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$ &c. in qua Arcuum Serie, C designat Circumferentiam totam.

COROLLARIUM V.

Si quantitates a, b, c, d , &c. statuatur esse valores successivi Cosinus x in Aequatione $1-2xz+x^2=0$, tunc ex supradictis facile concludetur Aequationem $1-2lz^2+x^2=0$, constari ex tot Aequationibus quadraticis $1-2az+x^2=0$, $1-2bz+x^2=0$, $1-2cz+x^2=0$, $1-2dz+x^2=0$ &c. in se invicem perpetuò ductis, quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$.

COROLLARIUM VI.

Si detur Divisor aliquis trinomialis & quadraticus Aequationis $1-2/z^n+x^2=0$, qualis nimirum $1-2az+x^2=0$, tunc comparatione

cione facta hujus Divisoris cum Trinomio $1-2xz+xz=0$, ex hac comparatione emerget unus ex valoribus quantitatis x ; sic, in praesente casu, concludi potest esse $x=a$.

COROLLARIUM VII.

Si ex Aequationibus binis $1+x^2=0$, $1-2xz+xz=0$, eliminetur quantitas x ; prodibit, modo n sit numerus par, Aequatio qua determinantur Cosinus eorum Arcuum qui sunt ad Semicircumferentiam, semel, ter, quinques, septies &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n ; quamobrem si sint a, b, c, d &c. valores horum Cosinuum, erunt $1-2az+xz$, $1-2bx+xz$, $1-2cx+xz$, $1-2dz+xz$ &c. Divisores trinomiales quantitatis $1+x^2$, quorum multitudo designabitur per $\frac{1}{2}n$: poterit fieri ut unus ex Cosinibus a, b, c, d &c. futurus sit nihilo equalis, quod quidem tunc eveniet, cum n erit numerus pariter impar, quo in casu $1+xz$ habendus erit in numero Divisorum Trinomialium.

COROLLARIUM VIII.

At si sit n numerus impar, instiganturque diviso quantitatis $1+x^2$ per $1+x$, & Quotiens dicatur Q ; tunc ex Aequationibus binis $Q=0$, & $1-2xz+xz=0$, si expellatur quantitas x ; orietur Aequatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sunt ad Semicircumferentiam semel, ter, quinques &c. sumptam in ea ratione quam habet 1 ad n ; quapropter si quantitates a, b, c, d &c. denotaverint valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+xz$, $1-2bx+xz$, $1-2cx+xz$, $1-2dz+xz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1+x^2$, quorum multitudo designabitur per $\frac{n-1}{2}$, his vero accedet divisor unicus binomialis $1+x$.

COROLLARIUM IX.

Si sit n numerus par, & dividatur quantitas $1-x^2$ per $1-xz$, & Quotus ex hac divisione ortus dicatur Q , tunc ex Aequationibus binis $Q=0$, $1-2xz+xz=0$, expulsa quantitate x ; emerget Aequatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sunt ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinques &c. sumptam in ratione 1 ad n ; quapropter si a, b, c, d &c. ponantur esse valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+xz$, $1-2bx+xz$, $1-2cx+xz$, $1-2dz+xz$ &c. divisores trinomiales quantitatis $1-x^2$, quorum mul-

4 MISCELLANEA

multitudo designatur per $\frac{n-1}{2}$; his autem adiunguntur Divisores duo binomiales $1-z$, & $1+z$.

COROLLARIUM.

Quod si fuerit n numerus impar, & dividatur $1-z^n$ per $1-z$, & Quotus dicatur Q , tunc ex Aequationibus binis $Q=0$ & $1-2xz+xz=0$, expulsa quantitate z , orietur Aequatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sunt ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinque &c. sumptam in ratione 1 ad n : quapropter si spectentur quantitates a, b, c, d &c. tanquam valores cogniti istorum Cosinum, consequens erit ut $1-2az+xz, 1-2bz+xz, 1-2cz+xz, 1-2dz+xz$ &c. futuri sint divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum divisorum multitudo exprimitur per $\frac{n-1}{2}$; his præterea adiungetur Divisor unicus Binomialis $1-z$.

LEMMA II.

Data quolibet Fractione $\frac{1}{1-cz+fcz-gz}$; &c. cuius denominator ex datis, $1, c, f, g$ &c. indeterminata z , quocummodo constituitur; Fractionem illam in Fractiones simpliciores resolvere.

SOLUTIO.

Fingatur Denominator $1-cz+fcz-gz+bx$ &c. esse $=0$, ex qua Aequatione formetur hæc altera, $z^4-ez^3+fcz-gz+b=0$ cuius Radices sint m, p, q, s &c.; sint etiam μ, π, κ, σ , producta differentiarum unicuique Radicum & Radicibus reliquis interjectum, hoc est, sit

$$\mu = m-p \times m-q \times m-s \text{ &c.}$$

$$\pi = p-m \times p-q \times p-s \text{ &c.}$$

$$\kappa = q-m \times q-p \times q-s \text{ &c.}$$

$$\sigma = s-m \times s-p \times s-q \text{ &c.}$$

penatur jam λ esse index altissimus indeterminatæ z in dicta Aequatione,

ANALYTICA LIB. I.

5

quatione, tunc factis $\frac{m^{A-1}}{\mu} = A$, $\frac{\rho^{A-1}}{\pi} = B$, $\frac{q^{A-1}}{\kappa} = C$, $\frac{s^{A-1}}{\sigma} = D$

Et. fractio proposita ad hasce simpliciores adducetur, nimirum $\frac{\frac{A}{1-mz}, \frac{B}{1-\rho z}, \frac{C}{1-qz}, \frac{D}{1-sz}}{\text{Et.}}$

COROLLARIUM

Si sint m & p Radices duae imaginariae ex eadem Aequatione quadratica ortae, quas ideo Radices cognatas appellare licet, addanturque in unum Fractiones $\frac{A}{1-mz}$ & $\frac{B}{1-\rho z}$; tunc quidquid est imaginarii in utraque fractione seorsum sumpta, semper ex earum summa

$$\frac{A-mBz}{1-mz-pz+mpz^2} \text{ evanescet.}$$

LEMMA III.

Data una aliqua ex Radicibus Aequationis cujuscunque, invenire productum differentiarum omnium huic Radici & Radicibus reliquis interjacentium.

SOLUTIO.

Aequatione, si opus est, rite preparata, tractetur incognita perinde ac si esset indeterminata: tum assumpta Aequationis Fluxione, dividantur singuli termini per Fluxionem indeterminatam, quibus factis, loco incognitae z substituitur valor ejus quilibet cognitus, & terminorum omnium aggregatum ex hac operatione nascentium quasto satisfacient.

PROBLEMA I.

Data ordinata hujus formae $\frac{1}{1+z^n}$, in qua n ponatur esse numerus par, eam in simpliciores Ordinatas resolvere.

SOLUTIO.

Fingatur $1+z^n$ esse $=0$, sint m, p, q, s Et. Radices hujus Aequationis, vel quod eodem recidit, earum reciprocae; etenim in Aequatione $1+z^n=0$, si scribatur $\frac{1}{z}$ pro z , eadem exurget Aequatio quae

6 MISCELLANEA

quæ antea, nimirum $2^n + 1 = 0$, hinc per Lemma Secundum, resolvitur hæc ordinata in suas componentes $\frac{A}{1-mz} + \frac{B}{1-pz} + \frac{C}{1-qz} +$

$\frac{D}{1-rz}$. Et. quarum primæ binæ in unum collectæ faciunt summam $\frac{A-mBz}{1-mz-pz+mpzr}$, sed ex eodem Lemmate est $A = \frac{m^{\lambda-1}}{\mu}$, jam vero

in hoc casu, est $\lambda = n$, adeoque erit $A = \frac{m^{n-1}}{\mu}$; sed ex tertio Lem-

mate est $\mu = mz^{n-1}$, vel propter $z = m$, est $\mu = mm^{n-1}$, erit igitur $A = \frac{m^{n-1}}{mm^{n-1}} = \frac{1}{m}$: & pari ratione erit $B = \frac{1}{n}$, ac proinde erit summa

$A+B = \frac{2}{n}$. Sit nunc $1-2az+xz=0$ ea Aequatio quadratica e qua Radices cognatæ m & p ortæ sunt; erit igitur $m+p=2a$, & $mp=1$, quo fieri ut $mB+pA$, five $\frac{m+p}{n}$ futurum sit $= \frac{2a}{n}$: erit igitur sum-

ma duarum Componentium $\frac{A}{1-mz} + \frac{B}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+xz}$; & eodem

jure, si sit $1-2bz+xz=0$ ea Aequatio quadratica e qua Radices cognatæ q & s ortæ sunt, erit summa duarum Componentium

$$\frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-rz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+xz}.$$

Idcirco, si dividatur semicircumferentia cujus radius est 1, in partes æquales quarum multitudo designetur per z ; deinde ex primo, tertio, quinto & impari quoque divisionis termino demittantur ad diametrum perpendiculara quibus determinantur Cosinus a, b, c, d Et. totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium;

$$\text{tunc erit } \frac{1}{1+z^n} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+xz} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+xz} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n}cz}{1-2cz+xz} \quad \text{Et.}$$

hæc vero series ad tot terminos est continuanda quot sunt unitates in $\frac{1}{2}n$

PROBLEMA II.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1+z^n}$, in qua n ponatur esse numerus impar, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Fingatur $1+x^n=0$: hujus Aequationis Radices sunt $m, p, q, s, \dots$. quarum primae binae sunt radices cognatae Aequationis quadraticae $1-2az+xz=0$, secundae binae sunt radices cognatae Aequationis quadraticae $1-2bz+xz=0$, & sic deinceps usque dum exhauriantur Cosinus omnes a, b, c, d &c. quorum multitudo designatur per $\frac{n-1}{2}$. Sit etiam t radix ultima residua quae quidem erit æqualis unitati negative sumptæ, utpote quæ genita sit ex Aequatione $1+x=0$ per quam Aequatio $1+x^n=0$ dividi potest. His positis resolvetur Ordinata data in Componentes $\frac{A}{1+mx} + \frac{B}{1+px} + \frac{C}{1+qx} + \frac{D}{1+iz} + \frac{E}{1+z} + \frac{F}{1-2ax+xz} + \frac{G}{1-2bx+xz} + \dots$ quarum primae binae conficiunt summam $\frac{2}{1-2ax+xz} + \frac{2}{1-2bx+xz} + \dots$ & sic deinceps, ultima vero residua aequalis est fractioni $\frac{1}{1+x}$: iisdem igitur

$$\text{positis ac in superiori Problemate, erit } 1+x^n = \frac{2}{1-2ax+xz} + \frac{2}{1-2bx+xz} + \frac{2}{1-2cx+xz} + \frac{2}{1-2dx+xz} + \frac{1}{1+x}.$$

PROBLEMA III.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-2^n}$, in qua n ponatur esse numerus par, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Fingatur $1-2^n=0$: Sint Radices hujus Aequationis $+1, m, p, q, s$ &c. -1 , quarum m & p sint Radices cognatae Aequationis $1-2az+xz=0$; p & q Radices cognatae Aequationis $1-2bz+xz=0$; $+1$ & -1 Radices extremæ ex divore $1-2x$ natae: his positis, si componentis sint $\frac{A}{1-x}, \frac{B}{1-mx}, \frac{C}{1-px}, \frac{D}{1-qx}, \frac{E}{1-ix}, \frac{F}{1+x}$ &c. $\frac{F}{1+x}$ invenietur unaquæque quantitarum, A, B, C, D, E, F , per Methodum

thodum supra expositam aequalis esse quantitati $\frac{1}{n}$; erunt igitur

Fractiones extremae, $\frac{1}{1-z}$ & $\frac{1}{1+z}$; invenitur praeterea summa binarum

$$\frac{B}{1-mz} \text{ \& } \frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}}{1-2az+zz}, \text{ itemque summa binarum } \frac{D}{1-qz} \text{ \& } \frac{E}{1-rz} \\ = \frac{\frac{2}{n} - \frac{\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}}{1-2bz+zz} \text{ \& sic de ceteris.}$$

Quamobrem si dividatur Semicircumferentia cujus Radius sit 1, in partes aequales quarum multitudo sit n ; deinde ex secundo, quarto, sexto, & pari quoque divisionis termino demittantur perpendiculara ad Diametrum quibus determinantur Cossus a, b, c, d &c. totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium;

$$\text{tunc erit } \frac{1}{1-2z^n} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2az+zz} + \frac{1}{1-2bz+zz} \text{ \&c. } + \frac{1}{1+z}$$

PROBLEMA IV.

Data Ordinata hujus formae $\frac{1}{1-2^n}$ in qua n sit numerus impar, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Fingatur $1-2^n=0$; sint hujus Aequationis Radices, 1, m, p, q , & c. quarum m & p sint Radices cognatae Aequationis $1-2az+zz=0$, q & s , Radices itidem cognatae Aequationis $1-2bz+zz=0$, &c. Denique $+1$ Radix unica superstes ex divifore $1-z=0$, nata: quibus positis, si sint $\frac{A}{1-z}, \frac{B}{1-mz}, \frac{C}{1-pz}, \frac{D}{1-qz}, \frac{E}{1-rz}$, fractiones componententes; per methodum ante expositam, invenietur unaquaeque quantitarum A, B, C, D, E &c. esse $= \frac{1}{n}$, adeoque componens prima erit $= \frac{1}{1-z}$; invenietur praeterea summa binarum

$$\frac{B}{1-mz} + \frac{C}{1-pz} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{\frac{2}{n}az}{1-2az+zz}}{1-2az+zz}, \text{ itemque summa binarum } \frac{D}{1-qz} + \frac{E}{1-rz} \\ = \frac{\frac{2}{n} - \frac{\frac{2}{n}bz}{1-2bz+zz}}{1-2bz+zz}, \text{ \& sic deinceps.}$$

Quare

ANALYTICA LIB. I.

9

Quare si dividatur semicircumferentia circuli eodem modo quo præscriptum fuit in superiori Problemate, erit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{1}{1-z} +$

$$\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}az}{1-2az+az^2} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bz}{1-2bz+az^2} \text{ &c.}$$

PROBLEMA V.

Data Ordinata huius formæ $1-2lz^n+z^{2n}$ in qua l ponatur esse minor Unitate, eam in simpliciores resolvere.

SOLUTIO.

Resumptis Æquationibus binis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, & $1-2xz+z^2=0$ sint m, p, q, s &c. Radices Æquationis prioris, quarum m & p sint etiam Radices posterioris ubi indeterminata x restricta fuerit ad cognitam a ; jam ex eo quod sit $1-2lz^n+z^{2n}=0$, patet esse $z^n + \frac{1}{z^n} = 2l$, præterea ex eo quod sit $1-2az+az^2=0$, patet summam Radicum huius Æquationis esse $= 2a$, itemque factum ex earum multiplicatione esse $= 1$; habemus itaque $1^\circ m^n + p^n = 2l$, $2^\circ m + p = 2a$, $3^\circ mp = 1$: pone jam fractiones componentes in quas Ordinata data resolvenda sit, esse $= \frac{A}{1-mz}, \frac{B}{1-pz}, \frac{C}{1-qz}$, $\frac{D}{1-sz}$, &c. ergo primæ binæ ad se invicem additæ conficiunt summam $\frac{A-mBz}{1-mz-pz+mpz^2}$; sed ex secundo Lemmate est $A = \frac{m^{\lambda-1}}{\mu}$, ubi scilicet λ seu $2n$ est Index altissimæ potestatis Æquationis $1-2lz^n+z^{2n}=0$, itemque ex tercio Lemmate est $\mu = 2nz^{2n-1} - 2nlz^{n-1}$, five, scripto m pro z , est $\mu = 2m^{2n-1} - 2nlm^{n-1}$, erit igitur $A = \frac{m^{2n-1}}{2m^{2n-1} - 2nlm^{n-1}} = \frac{m^n}{2m^n - 2nl}$, & pari ratione erit $B = \frac{p^n}{2np^n - 2nl}$; adeoque summa $A+B$ erit $= \frac{2np^nm^n + 2lnm^n}{4mp^nm^n - 4nlp^n - 4nlnm^n + 4nll}$ sed propter $m^n + p^n = 2l$, & $mp = 1$

$$mp = 1. \text{ Sequitur summam } A+B \text{ redactum iri ad } \frac{4r \times \sqrt{1-l}}{4m \times 1-l} =$$

$$\frac{1}{n}; \text{ Porro summa } pA + mB = \frac{pm^n}{2nm^n - 2nl} + \frac{mp^n}{2np^n}, \text{ sed propter}$$

$$m + p = 2a, \& mp = 1. \text{ haec summa redigetur ad } \frac{2a - l \times m^{n-1} + p^{n-1}}{2n \times 1 - l},$$

sed quo jure est $m^n + p^n = 2l$, eodem jure erit $m^{n-1} + p^{n-1} = 2c$, modo intelligatur c esse Cofinus Arcus ejus qui fit ad Arcum ejus Cofinus est a , ut $n-1$ ad 1 , unde tandem fit ut $pA + mB$ sit $= \frac{a-l}{n-1l}$; erit igitur summa duarum fractionum $\frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-pz} = \frac{1}{n} - \frac{a-l}{n-1ln} x = \frac{1}{n} - \frac{a-l}{1-2ax+zx}$, & eodem processu, fractiones quaeque binæ reliquæ in unum addi poterunt.

Quapropter si sit A Arcus Quadrante minor ejus Cofinus sit l ad Radium 1 , C circumferentia tota; a, b, c, d $\mathcal{E}c$. Cofinus Arcum $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}$ $\mathcal{E}c. e, f, g, h$ $\mathcal{E}c$. Cofinus eorum Arcum qui singuli ad singulos Arcus antecedentes eodem ordine sumptos eam rationem habeant quam habet numerus $n-1$ ad Unitatem; tunc erit

$$\frac{1}{1-2lx^n + x^{2n}} = \frac{1}{1-2ax+zx} + \frac{a-l}{n-1ln} x + \frac{b-lf}{n-1ln} x^2 + \frac{c-lf}{n-1ln} x^3 + \frac{d-lb}{n-1ln} x^4 + \mathcal{E}c.$$

PROBLEMA VI.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{1}{1-2lx^n + x^{2n}}$ in qua l sit major Unitate, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Fac $l + \sqrt{l-1} = m$, $l - \sqrt{l-1} = p$; pone insuper $x = x\sqrt{m}$ & $y = x\sqrt{p}$; quo facto, Ordinata data resolveretur in hasce duas

$$\frac{m}{m-p}$$

$\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1-x^n} = \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1-y^n}$, quarum utraque ex Prob. 3. & 4. ad componentes suas adducetur.

PROBLEMA VII.

Data Ordinata huius formæ $\frac{1}{1+2/z^n + z^{2n}}$ in qua ponatur es-

se 1 Unitate minor, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Sit A Arcus quadrante major cuius Cosinus sit 1 ad Radium 1, C circumferentia tota: sint præterea a, b, c, d &c. Cosinus arcuum $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C-A}{n}$ &c. itemque sint e, f, g, h, i &c. Cosinus Arcuum quorum uniusquisque ad unumquemque Arcum antecedentem eam rationem habeat quæ est numeri $n-1$ ad 1, his

$$\text{positis, erit } \frac{1}{1+2/z^n + z^{2n}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{A+1}{n}z}{1-2az+az^2} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{b+1}{n}z}{1-2bz+az^2} +$$

PROBLEMA VIII.

Data Ordinata huius formæ $\frac{1}{1+2/z^n + z^{2n}}$ in quo 1 sumatur esse Unitate maior, eam in simplices resolvere.

SOLUTIO.

Fac $1+\sqrt{1-1} = m, 1-\sqrt{1-1} = p$, pone insuper $x = z\sqrt{m}$ itemque $y = z\sqrt{p}$, tunc ex supradictis perspicuum est Ordinatam datam divisum iri in has binas $\frac{m}{m-p} \times \frac{1}{1+x^n} - \frac{p}{m-p} \times \frac{1}{1+y^n}$, quarum utraque in simplices resolveri poterit.

MISCELLANEA &c.

PROBLEMA IX.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{e}{e+fs^n+gz^{2n}}$, eam in simpliciores res resolvere.

SOLUTIO.

Pone $z^n = v^n \sqrt{\frac{e}{g}}$, $f = 2\sqrt{ge}$; quibus positis, Ordinata data ad hanc adducetur $\frac{1}{1+2\sqrt{z^n+g^{2n}}}$, quæ ex supradictis in simpliciores poterit resolvi.

PROBLEMA X.

Data Ordinata hujus formæ $\frac{e}{e+fs^n+gz^{2n}}$, eam in simpliciores resolvere.

SOLUTIO.

Pone $\frac{f+\sqrt{f^2+4g^2}}{2e} = m$, & $\frac{-f+\sqrt{f^2+4g^2}}{2e} = p$, tunc id facile percipietur Ordinatam datam, subsidio Lemmatis Secundi, divisum ita in has binas $\frac{m}{m+p} \times \frac{1}{1-mz^n} + \frac{p}{m+p} \times \frac{1}{1-pz^n}$, vel positis $mz^n = x^n$, & $pz^n = y^n$, in hæc binas alteras $\frac{m}{m+p} \times \frac{1}{1-x^n} + \frac{p}{m+p} \times \frac{1}{1-y^n}$





LIBER II.

Scholium ad præcedentia.

CAPUT I.

AD LEMMA I.

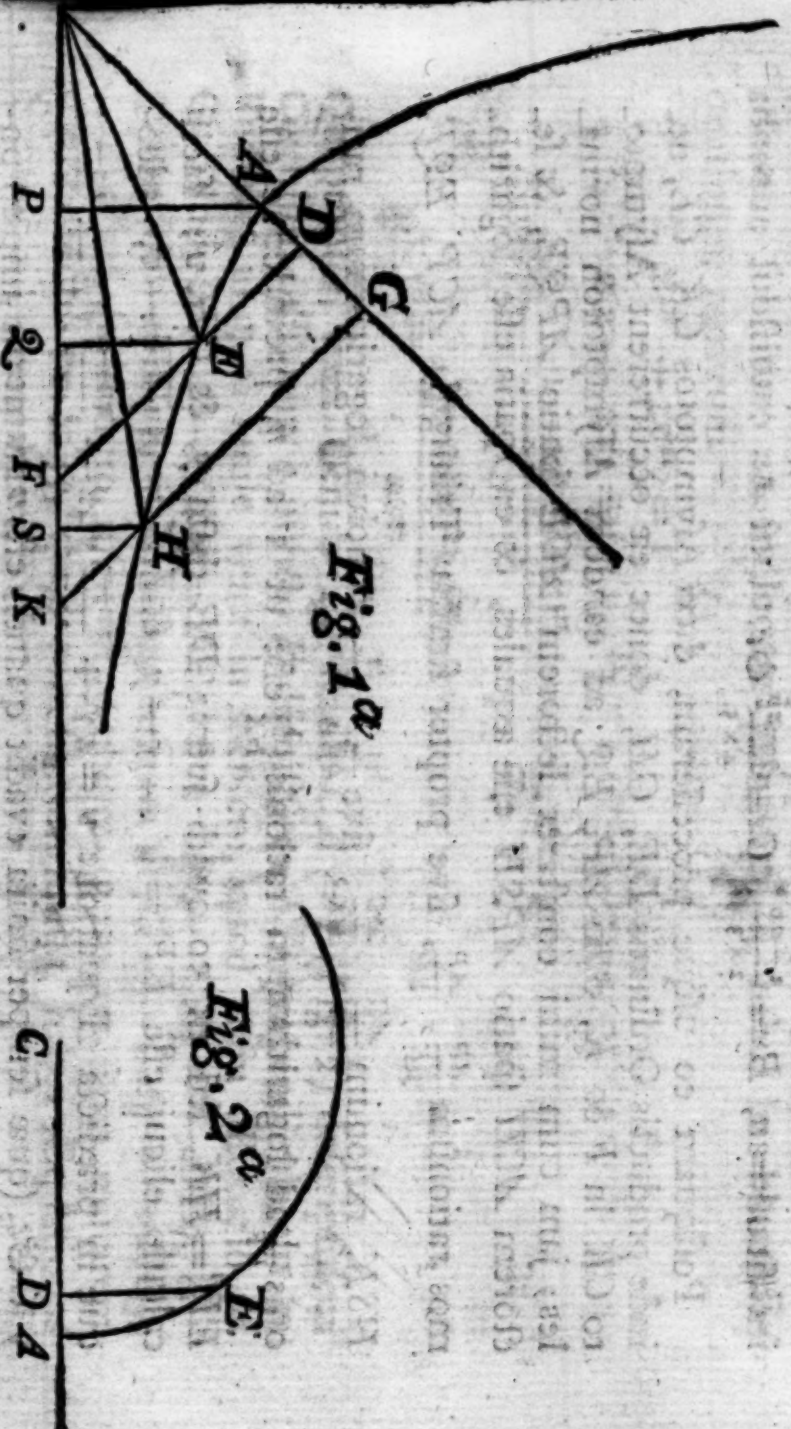


Fig. 1^a

Fig. 2^a

Neunte Anno 1707, vel aliquanto citius, ipse mihi Problema sequens solvendum proposueram.

In Hyperbola Equilatera AH (Fig. 1.) cujus Centrum C , vertex A , Semiaxis CA equalis Unitati, ducta ad Axim ordinata DE cui competit sector hyperbolicus ACE ,

ACE, invenire ordinatam *GH*, cui competat sector hyperbolicus *ACH*, in ea ratione ad priorem quæ est n ad 1.

Tunc nominatis *DEy*; & *HGv*; invenieram Fluxionem secto-

ris *ACE* esse $\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{1+y}}$, & Fluxionem sectoris *ACH* $\frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{1+v}}$ unde

oriebatur proportio $\frac{y}{\sqrt{1+y}} : \frac{v}{\sqrt{1+v}} :: 1, n$, e qua per Methodum Sc-

rierum deduxeram Equationem $v = ny + \frac{m-1}{2 \times 3} y^3 A + \frac{m-9}{4 \times 5} y^5 B$

$+ \frac{m-25}{6 \times 7} y^7 C$ &c. quæ analogæ est seriei a Cl. Newtono jam pridem

inventa ad divisionem Arcus in partes quolibet æquales, etenim po-

sito y sinu recto Arcus cujusbet ad Radium 1, & v Sinu recto Arcus

alterius qui sit ad priorem ut n ad 1, invenerat vir præstantissimus

esse $v = ny + \frac{1-m}{2 \times 3} y^3 A + \frac{1-m}{4 \times 5} y^5 B + \frac{25-m}{6 \times 7} y^7 C$ &c. ubi quantita-

tes *A*, *B*, *C* &c. designant Coefficientes terminorum antecedentium

ita sit $A = n$, $B = \frac{1-m}{2 \times 3}$, $C = \frac{9-m}{4 \times 5}$ &c.

Postquam eo usque procefferam, duxi Asymptotos *CK*, *CL*, de-
inde productis Ordinatis *DE*, *GH*, donec eæ occurrerent Asympto-
to *CK* in *F* & *K*, duxi *AP*, *EQ*, ad eandem Asymptoton norma-
les; jam cum mihi constaret sectorem *ACE* spatio *APQE*, & se-
ctorem *ACH* spatio *APSH* esse æquales, & ea spatia esse logarithi-

mos rationum $\frac{AP}{QE}$, $\frac{AP}{SH}$, siue propter similia Triangula *ACP*, *EQF*,

HSK, rationum $\frac{AC}{EF}$, $\frac{AC}{HK}$, siue $\frac{1}{EF}$, $\frac{1}{HK}$, conclusi logarithmum rati-

onis $\frac{1}{EF}$ ad logarithmum rationis $\frac{1}{HK}$ esse ut 1 ad n , proindeque esse

$EF^n = HK$, sed ex eo quod fuerat *DE* dicta y , & *GH*, v ; facili

calculo eliciui esse $EF = \sqrt{1+yy} - y$, & $HK = \sqrt{1+vv} - v$, adeo-

que in prædicta Equatione $v = ny + \frac{m-1}{2 \times 3} y^3 A + \frac{m-9}{4 \times 5} y^5 B + \frac{m-25}{6 \times 7}$

$y^7 C$ &c. (quæ semper finita evadit quando est n numerus impar) po-
tui invenire y ex data v , quo factum est ut mihi patuerit metho-

des solvendi Equationes quasdam potestatis quintæ, septimæ, no-

nae &c. in insolutum: etenim ex eo quod sit $\sqrt{1+yy-y}^n = \sqrt{1+vv-v}$

si ponatur $\sqrt{1+vv} - v = s$ inde erit $\sqrt{1+yy-y} = s^{\frac{1}{n}}$, siue, $1+yy =$

$$= s^{\frac{n}{2}} + 2ys^{\frac{n}{2}} + y^2, \text{ quapropter deleto utrinque } yy, \text{ erit } 2ys^{\frac{n}{2}} = 1 - s^{\frac{n}{2}}, \text{ five } 2y = \frac{1}{s^{\frac{n}{2}}} - s^{\frac{n}{2}}, \text{ adeoque erit } y = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^{\frac{n}{2}}} - s^{\frac{n}{2}} \right)}{\sqrt{1+v-v}}$$

Sumatur $n = 5$. & $v = 4$, tunc Aequatio generalis ad hanc restringetur $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$, quae in casu invenietur Radix $y =$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{4 + \sqrt{17}}} - \frac{1}{2} \sqrt[5]{4 + \sqrt{17}} = 0.4313 \text{ proxime.}$$

Jam vero ut experier num possit Formula superior, mutatis mutandis, ad Aequationem Newtonianam transferri, posui ut ante $\sqrt{1+vv-v} = s$, five $ss + 2sv = 1$, posui etiam $\sqrt{1+yy-v} = y = z$, five $zz + 2zy = 1$. Jam ex supra demonstratis, est $s = z$, adeoque substituto z in locum quantitat s , habui has binas Aequationes, nimirum

$$z^2 + 2z^3v = 1$$

$$zz + 2zy = 1$$

$$\text{Sive } vv = \frac{1 - 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

$$\& yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz}$$

Quapropter, cum Centro C , Radio $CA = 1$ (Fig. 2) descripssem Circulum AE , tum e puncto E demississem ED perpendicularem in Radium, id mihi facile venit in mentem, quod cum Aequatio ad Circulum sit $CAq - CDq = DEq$, five $CDq - CAq = -DEq$, Aequatio vera ad Hyperbolam regulataram sit $CDq - CAq = +DEq$, nihil aliud faciendum mihi incumberet quam ut signa mutarem quadraterum vv & yy , quod cum factum fuisset, habui Aequationes binas ad circulum, has scilicet

$$vv = \frac{1 - 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

$$\& -yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz}$$

Sive

$$\text{Sive } 1 - vv = \frac{1 + 2z^n + z^{4n}}{4z^n}$$

$$\& 1 - yy = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}$$

in quibus v designat sinum rectum Arcus cuiuscunque, & y sinum rectum Arcus alterius qui sit in ea ratione ad priorem ut 1 ad n .
Positis jam $1 - vv = ll$, & $1 - yy = xx$ habui.

$$ll = \frac{1 + 2z^n + z^{4n}}{4z^n}$$

$$\& xx = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}, \text{ tunc extractis radicibus habui}$$

$$l = \frac{1 + z^{2n}}{2z^n}$$

$$\& x = \frac{1 + zz}{2z} \text{ Aequationes ad Cosinus.}$$

Ex priore novissimarum Aequationum deduxeram $z = \sqrt[2]{1 + \sqrt{ll - 1}}$

ex posteriore vero $x = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}z$, sicque demum concluderam

$$\text{esse } x = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + v\sqrt{ll - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + v\sqrt{ll - 1}}, \text{ sed cum mihi constaret Aequa-}$$

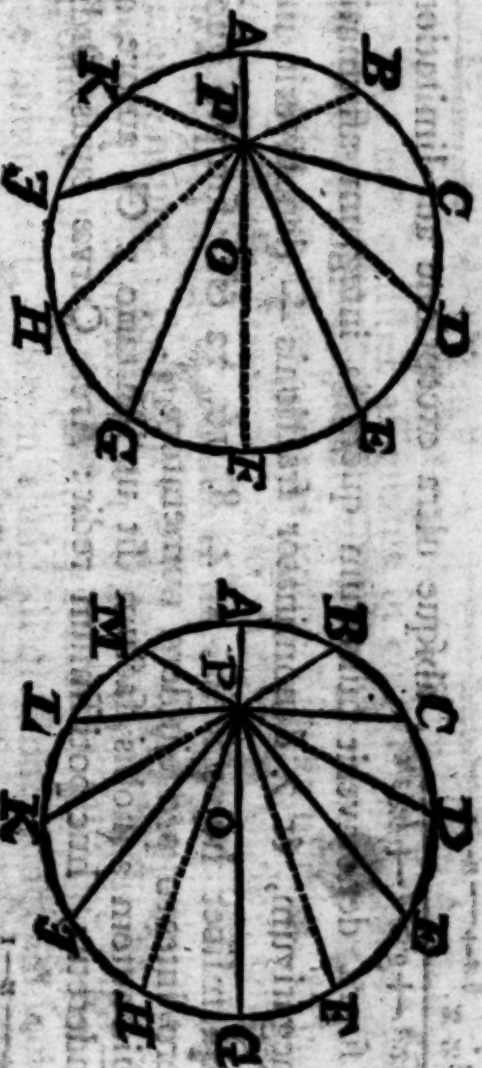
tiones ad Sinus rectos sub eadem forma exhibitum iri ac Aequationes ad Cosinus, ubi est n numerus impar; in locum precedentis conclusionis, hanc substitueram nimirum, in Aequatione Newtoniana, $ny + \frac{1 - n^n}{2 \times 3} Ay^3 + \frac{9 - n^n}{4 \times 5} By^5 + \frac{25 - n^n}{6 \times 7} Cy^7 \&c. = v$, si sit n numerus impar, quo fit ut Aequatio finita evadat, tunc fore $y =$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{-v + \sqrt{vv - 1}}} + \frac{1}{2}\sqrt{-v + \sqrt{vv - 1}}, \text{ vel } y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{-v + \sqrt{vv - 1}}} +$$

$\frac{1}{2}\sqrt{-v + \sqrt{vv - 1}}$, pro ut $\frac{n-1}{2}$ fuerit numerus par aut impar, cuius variationis signorum ratio satis intelligitur ex solo conspectu Aequationum ad Sinus & Cosinus in casibus imparibus.

Quoniam vero valor quantitatis y prodeat sub forma imaginaria, cum ad Sinus Arcuum restringitur, attamen hanc expressionem valoris y non ut inutilem judicaveram, utpote quæ ad casus alios posset transferri, nempe si ita accideret ut v foret unitate major.

Hæ autem conclusiones prodierant absque demonstratione in *Actis Philosophicis pro mensibus Jan. Feb. & Mart. Anni 1707.* ex quo tempore eas profus neglexeram, donec a me resumptæ essent occasione data ex Cl. *Cotesii* Libro, ubi is primum lucem videre cepit: etenim cum inter plurima admiratione digna illic repertenda, notabilem obineat locum Theorema quoddam de divisione Circuli ab eximio illo Mathematico inventum, sed non demonstratum, maximo sensu me affectum desiderio eius demonstrationem assequendi, quod eo usque processit ut vix quidquam ardentius unquam expetiverim, quo factum est ut cum paulisper in hac contemplatione moratus essem, debilis mihi suborta esset spes scopum attingendi, sed non diu hæsi quin me id posse consequi pro certo haberem, revocantem scilicet in mentem paucæ quædam istis affinia in secunda Editione libri mei de Sorte, sed præsertim ea quæ de Aequationibus ad Circulum olim excogitaveram. Theorema autem Cotesianum sic se habet.



Si quarantur Factores Binomii $a^{\lambda} \pm x^{\lambda}$, existente indice λ , quolibet integro: dividatur Circumferentia $ABCD$, ejus centrum O in totidem partes æquales quot sunt unitates in 2λ ; & ab omnibus divisionibus ad punctum quodvis P in OA radio, si opus sit situm, ducantur rectæ, AP, BP, CP, DP, EP, FP &c; deinde positis $OA = a$, $OP = x$, contentum sub omnibus AP, CP, EP &c. sumptis a divisionibus alternis per integrum circuitum, adæquabit $a^{\lambda} - x^{\lambda}$, vel $x^{\lambda} - a^{\lambda}$, pro ut P fuerit intra vel extra circuitum: &

contentum sub reliquis BP , DP , EP &c. in locis reliquis alter-
 nis adequabit $a^{\lambda} + x^{\lambda}$. Exempli gratia si λ sit 5, dividatur se-
 micircumferentia in 10 partem aequales, eritque $AP \times CP \times EP$
 $\times GP \times IP = OA^5 - OP^5$, existente P intra circulum, & $BP \times DP$
 $\times FP \times HP \times KP = OA^5 + OP^5$. Similiter si λ sit 6, divisa circum-
 ferentia in 12 partes aequales: erit $AP \times CP \times EP \times GP \times FP \times KP$
 $\times IP \times LP = OA^6 - OP^6$, existente P intra circulum, & $BP \times DP$
 $\times MP = OA^6 + OP^6$.

Ope Theorematis illius potuit Clarissimus Autor Fluentem inve-
 nire quantitatis cujuscunque quæ cum hac forma comparari potest

$\frac{dx x^{\theta n + \frac{f}{\lambda} n - 1}}{e - f x^n}$, ubi d , e , f denotant quantitates invariables, & va-

riabilem, n indicem quemvis, θ numerum quemvis integrum, af-
 firmativum aut negativum, $\frac{f}{\lambda}$ quemlibet fractum; potuit etiam ex-

hibere fluentem quantitatis $\frac{dx x^{\theta n + \frac{f}{\lambda} n - 1}}{e - f x^n + g x^{2n}}$, vel etiam hujus

$\frac{dx x^{\theta n + \frac{f}{\lambda} n - 1}}{e - f x^n + g x^{2n} + h x^{3n}}$, absque ultra exceptione aut limitatione, si
 θ ut supra denotaverit numerum quemvis integrum affirmativum
 aut negativum, & λ denominator fractionis $\frac{f}{\lambda}$ denotaverit nume-
 rum quemlibet hujus seriei, 2, 4, 8, 16, 32 &c. sumpto quolibet
 numero integro pro ejusdem numeratore f .

Quid autem a nobis factum sit ut limitatio a Cl autore allata
 rescinderetur, huc potissimum redit: Area Curvæ cujus Ordinata

$\frac{x^{\theta n + \frac{f}{\lambda} n - 1}}{1 - 2/x^n + x^{2n}}$, converti potest in aliam sibi æqualem cujus ordi-

nata sit $\frac{x^{\theta n + \frac{f}{\lambda} n - 1}}{1 - 2/x^n + x^{2n}}$, quod suo loco demonstrabitur, jam si sit

major unitate, hæc Ordinata poterit dividi in duas alteras Binomiales
 quarum utraque subsidio Theorematis Cotensani in simplicissimas Or-
 dinatas resolvetur, quo fiet ut Area his Ordinatis competentes futuras
 sint aptæ quæ eam Arcis Conicarum Sectionum comparentur; at vero
 si fuerit minor unitate, non poterit hæc Ordinata dividi in Ordina-

deducerentur; quod cum me fecisse putem, illud tamen fateor, nisi Cotesius facem prætulisset, me hanc Doctrinam resolutionis Trinomiorum ad hunc exitum nunquam fortasse perduciturum fuisse. Qui autem videre cupit utilissimam Fluentium Tabulam quam Clarissimus *Smith* Astronomiae & Philosophiae experimentalis apud Cantabrigienses Professor dignissimus, hocce Cotesii principio adjunctis condiderit, librum ipsum adeat mira ubique concinnitate & elegantia rerum & diffiliorum Problematum enodatione felicissima maxime insignem.

AD COROLLARIUM I.

Corollarium primum eximit Radicalitates quibus usi fuimus in Lemmate primo.

AD COROLLARIUM II.

Proponatur v. g. id inveniendum, quænam sit relatio inter Cosinum Arcus cuiuslibet, & Cosinum quintæ ejus partis: Sit l Cosinus Arcus dati, & x Cosinus quintæ ejus partis, jam cum n , hoc in casu, evadat 5, habemus idcirco Aequationes binas

$$1 - 2lx^5 + x^{10} = 0, \text{ sive } 1 + x^{10} = 2lx^5 \text{ prior}$$

$$\& 1 - 2xz + xz^2 = 0, \text{ sive } 1 + xz = 2xz, \text{ posterior : attollatur}$$

Aequatio posterior ad potestatem quintam, hinc erit

$$1 + 5xz + 10z^2 + 10z^4 + 5z^8 + x^{10} = 32x^5z^3, \text{ sed ex prior, est } 1 + 2x^{10} = 2lx^5, \text{ adeoque erit}$$

$$5 + 10xz + 10z^2 + 5z^6 = 32x^5z^3 - 2lx^5.$$

Attollatur nunc Aequatio posterior ad Cubum, eaque deinde multiplicetur per 5, tunc erit

$$5 + 15xz + 15z^2 + 5z^6 = 40x^5z^3$$

ex hac novissima Aequatione, subtrahæ jam proximam superiorem tum reliquum divide per xz , hinc fiet

$$5 + 5xz = 40x^3z - 32x^3z + 2lx, \text{ sed ex posteriore}$$

$$\text{Aequatione } 5 + 5xz = 10xz, \text{ Adeoque tandem prodit}$$

$$40x^3 - 32x^3 - 10x + 2l = 0 \text{ sive}$$

$$16x^3 - 20x^3 + 5x - l = 0 \text{ Aequatio qua definitur relatio inter } l \text{ \& } x.$$

ANALYTICAE LIB. II.

AD COROLLARIUM III.

Aequationes Trinomiales $1 - 2lx^n + x^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + xz^2 = 0$ ortae sunt ex his binis $11 = \frac{1 + 2x^n + x^{2n}}{4x^{2n}}$ & $xx = \frac{1 + 2xz + xz^2}{4xz}$ quemadmodum ostensum est in adnotatis ad Lemma primum, nimirum extractis ex utraque Aequatione radicibus quadraticis, jam si pro Radice quadrati 11 scribatur $-l$, & pro Radice quadrati xx scribatur x ut antea, erunt Aequationes trinomiales $1 + 2lx^n + 2x^{2n} = 0$ & $1 - 2xz + xz^2 = 0$, ubi jam l denotat Cosinum Arcus quadrante majoris, seu quod eodem recidit, ubi est $-l$ Cosinus Arcus dividendi in parte n ; sin, Radix quadrati 11 sumatur $-l$, & Radix quadrati xx sumatur $-x$, erunt Aequationes trinomiales $1 + 2lx^n - x + x^{2n} = 0$, $1 + 2xz - xz^2 = 0$, & Aequationes hinc oriundae eadem erunt in casibus imparibus ac si Aequationes sumerentur hujus formae $1 - 2lx^n + x^{2n} = 0$, & $1 - 2xz + xz^2 = 0$; sed in casibus paribus, mutatio signi in quantitate x nullam inducit mutationem signorum in Aequationem emergentem, adeoque observata mutatione signi in quantitate l , Aequationes $1 + 2lx^n + x^{2n} = 0$, & $1 - 2xz - xz^2 = 0$ sufficient ad omnes casus.

AD COROLLARIUM IV.

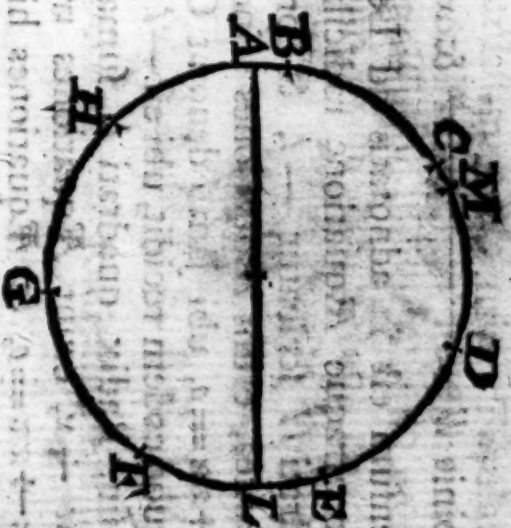
Sumuntur Arcus $\frac{1}{n}$, $\mathcal{E}^c. \frac{C-1}{n}, \frac{C+1}{n}, \frac{3C-1}{n}, \frac{3C+1}{n}, \frac{5C-1}{n}, \frac{5C+1}{n}$

$\mathcal{E}^c.$ alternatim ad unam & alteram partem principii Arcum, etenim Arcus eo ordine sumpti quo hic apponuntur se invicem superant minimis differentis, ita ut si sit n numerus par, pars prior dimidia contineat eos Arcus quorum Cosinus sunt affirmativi, pars vero posterior eos contineat quorum Cosinus sunt negativi.

Si sit n numerus impar, talis tamen ut $\frac{n-1}{2}$ sit numerus par, pars prior $\frac{n-1}{2}$ continebit eos Arcus quorum Cosinus sunt affirmativi, pars vero posterior illos continebit quorum Cosinus sunt negativi; sin vero, sit $\frac{n-1}{2}$ numerus impar, pars prior $\frac{n-1}{2}$ continebit Cosinus affirmativos, pars posterior $\frac{n-1}{2}$, negativos.

Possunt sumi Arcus $\frac{1}{n}, \frac{C+1}{n}, \frac{3C+1}{n}, \frac{5C+1}{n}, \frac{7C+1}{n}, \frac{9C+1}{n}, \frac{11C+1}{n}, \frac{13C+1}{n}, \frac{15C+1}{n}, \frac{17C+1}{n}, \frac{19C+1}{n}, \frac{21C+1}{n}, \frac{23C+1}{n}, \frac{25C+1}{n}, \frac{27C+1}{n}, \frac{29C+1}{n}, \frac{31C+1}{n}, \frac{33C+1}{n}, \frac{35C+1}{n}, \frac{37C+1}{n}, \frac{39C+1}{n}, \frac{41C+1}{n}, \frac{43C+1}{n}, \frac{45C+1}{n}, \frac{47C+1}{n}, \frac{49C+1}{n}, \frac{51C+1}{n}, \frac{53C+1}{n}, \frac{55C+1}{n}, \frac{57C+1}{n}, \frac{59C+1}{n}, \frac{61C+1}{n}, \frac{63C+1}{n}, \frac{65C+1}{n}, \frac{67C+1}{n}, \frac{69C+1}{n}, \frac{71C+1}{n}, \frac{73C+1}{n}, \frac{75C+1}{n}, \frac{77C+1}{n}, \frac{79C+1}{n}, \frac{81C+1}{n}, \frac{83C+1}{n}, \frac{85C+1}{n}, \frac{87C+1}{n}, \frac{89C+1}{n}, \frac{91C+1}{n}, \frac{93C+1}{n}, \frac{95C+1}{n}, \frac{97C+1}{n}, \frac{99C+1}{n}$

Et. & erunt post peractum circuitum pugna, divisum eadem quæ prius.



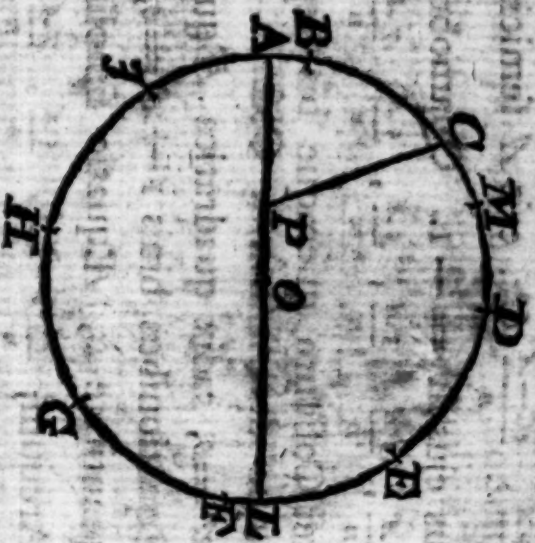
Etenim si Diametro AL describatur Circulus, atque ex utrovis Diametri termino sumatur Arcus $AM = A$, & $AB = \frac{1}{n}$, sumanturque etiam Arcus omnes BC, CD, DE, EF, FG, GH Et. æquales Arcui $\frac{C}{n}$, patet fore Arcus $AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH$ ordinatim æquales Arcubus $\frac{1}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C+A}{n}, \frac{4C+A}{n}, \frac{5C+A}{n}, \frac{6C+A}{n}$ Et. ultimus autem in hac serie responder ei qui ante designabatur per $\frac{C-1}{n}$, penultimus vero illi responder qui ante designabatur per $\frac{2C-1}{n}$, etenim erit ultimus terminus in hac serie itea designabatur per $\frac{2C-1}{n}$, quo subtracto ex C , erit Arcus residuus $\frac{C-1}{n}$, & sic de cæteris.

Si in casibus imparibus E sit punctum terminans ultimum Arcum eorum qui ponuntur in semicircumferentia ABL , tunc erit Arcus LE ad LM ut AB ad AM ; adeoque, siue fuerit A quadrante minor, siue quadrante major, Cofinus Arcuum, $\frac{1}{n}, \frac{2C-1}{n}, \frac{3C-1}{n}, \frac{4C-1}{n}, \frac{5C-1}{n}, \frac{6C-1}{n}$, idem erunt in utroque casu, præterquam quod Cofinus ii qui in priore casu obveniant affirmativi, in posteriore sunt negativi, & vice versa: istud autem etiam deducitur ex natura Aequationum qua determinantur Cofinus Arcuum.

In

ANNUAL REPORT OF THE

In calibus paribus, Cosinus quique habet suam equalem sub signo contrario; quod quidem demonstratione non indiget,



Si in casibus paribus fumatur $AM=A$, $AB=\frac{1}{n}$; deinde fumantur

Arcus omnes $BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI$, aequales $\frac{C}{n}$, c-
runt ut prius $AB, AI, AC, AH, AD, AG, AE, AF = \frac{A}{n}, \frac{C-A}{n},$
 $\frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C-A}{n}, \frac{3C+A}{n}, \frac{4C-A}{n}, \frac{4C+A}{n}$; sed non erit
in casibus paribus LE ad LM ut AB ad AM , ut erat in impari-
bus, adeoque Radices Aequationis ex divisione Arcus AM exurgen-
tis differunt omnino & toto genere a Radicibus Aequationis exur-
gentis ex divisione Arcus LM , istud vero, etiam facile conclu-
detur ex solo conspectu Aequationum ad Cosinus.

AD COROLLARIUM

Si in Radio OA sumatur e Centro O versus principium Arcuum Linea quaelibet $OP = z$, atque ex puncto P ducatur ad punctum quodlibet C in circumferentia positum linea PC , sitque Cofinus Arcus $AC = x$, erit $PCy = 1 - 2xz + xz$, si fit AC quadrante minor, vel $1 + 2xz + xz$, si fit quadrante major, vel semper $1 - 2xz + xz$ habita ratione variationis signorum in Cofinibus affirmativis & negativis.

AD COROLLARIUM VII.

Si in Aequatione $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$, ponatur $l = -1$, tunc ex Aequationibus binis $1 + 2x^n + x^{2n} = 0$, & $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$, ex pulsâ

pulsâ z , orietur Aequatio qua determinantur Cofinus semicircumferentiae in partes n divisae; etenim in serie $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, $\frac{4C-A}{n}$ &c. erit A semicircumferentia, cum ex Hypothesi Cofinus ejus sit $= -1$. Quamobrem hæc series Arcuum evadet, $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c. ubi si sit n numerus par, patet Cofinum quenque bis repetitum iri, atque adeo Aequationem qua determinantur Cofinus isti fore quadraticam; jam est $1 + z^n = 0$, radix quadratica Aequationis $1 + 2z^n + z^{2n} = 0$. Ergo ex Aequationibus binis $1 + z^n = 0$, $1 - 2xz + z^2 = 0$, orietur, eliminata quantitate z , Aequatio simplicissima qua determinantur Cofinus Arcuum, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c.

AD COROLLARIUM VIII.

Si ex Aequationibus binis $1 + 2z^n + z^{2n} = 0$, $1 - 2xz + z^2 = 0$, ubi nunc ponitur n numerus impar, expungatur z , orietur Aequatio qua determinantur Cofinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{7A}{n}$, $\frac{7A}{n}$ &c. jam cum ultimus terminus hujus Series sit $\frac{7A}{n}$, seu universe $\frac{nA}{n}$, seu A , cujus Cofinus est -1 ; patet Cofinum istum genitum fuisse ex Aequationibus binis $1 + 2z + z^2 = 0$, $1 - 2xz + z^2 = 0$, inter se comparatis; divisa itaque Aequatione $1 + 2z + z^2 = 0$, per $1 + 2z + z^2 = 0$; si Quotus dicatur Q , patet ex Aequationibus binis $Q = 0$, $1 - 2xz + z^2 = 0$, expulsa z , orituram Aequationem qua determinantur Cofinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, &c. adeoque ex Aequationibus binis $Q = 0$, $1 - 2xz + z^2 = 0$, expulsa z , orituram Aequationem qua determinantur Cofinus Arcuum $\frac{A}{n}$, $\frac{3A}{n}$, $\frac{5A}{n}$, &c. sed est Q quotus Quantitatis $1 + 2z + z^2$ divisae per $1 + 2z + z^2$, adeoque est Q quotus Quantitatis $1 + z^n$ divisae per $1 + z$, patet igitur Corollarium octavum.

AD COROLLARIUM IX.

Si ex Aequationibus binis $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$, $1 + 2xz + xz = 0$, ubi n ponitur numerus par, expungatur z , orietur Aequatio qua determinentur Cofinus circumferentiae simplicis, duplicis, triplicis, quadruplicis &c. in partes n divisae; etenim in apposta serie $\frac{1}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, &c. est $A = 0$, cum Cofinus ejus sit $= 1$, adeoque haec series evadet $\frac{0}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$,

$\frac{2C}{n}$, $\frac{1}{2} \frac{2^n C}{n}$ seu $\frac{1}{2} C$, ubi Arcus singuli geminantur prae-ter primum & ultimum; sed Cofinus Arcus primi est 1, adeoque genitus est ex Aequationibus binis $1 - 2z + xz = 0$, $1 - 2xz + xz = 0$, inter se comparatis; Cofinus vero Arcus ultimi est -1 , adeoque genitus est ex Aequationibus binis $1 + 2z + xz = 0$; $1 - 2xz + xz = 0$, inter se comparatis; potest igitur Aequatio $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$ dividi per $1 - 2z + xz \times 1 + 2z + xz$ sive per $1 - x^{1^2} \times \frac{1 - x^{1^2}}{1 + x^{1^2}}$; itaque Aequatione per $\frac{1 - x^{1^2}}{1 + x^{1^2}} \times \frac{1 - x^{1^2}}{1 + x^{1^2}}$, si Quotus dicatur $\mathcal{Q}$, tunc ex Aequationibus binis $\mathcal{Q} = 0$. $1 - 2xz + xz = 0$, orietur, expulsa z , Aequatio qua determinentur Cofinus Arcuum $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, &c. qui omnes obveniunt gemini, quapropter si Aequatio $1 - x^n = 0$, Radix nimirum quadratica Aequationis $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$, dividatur per $1 - x \times 1 + x$ & Quotiens dicatur $\mathcal{Q}$, tum ex Aequationibus binis $\mathcal{Q} = 0$, $1 - 2xz + xz = 0$; orietur, expulsa z , Aequatio simplicissima qua determinentur Cofinus Arcuum $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, &c.

AD COROLLARIUM X.

Si ex Aequationibus binis $1 - 2x^n + x^{2n} = 0$, $1 - 2xz + xz = 0$, ubi ponitur n numerus impar, eliminetur quantitas z ; orietur Aequatio qua determinentur Cofinus Circumferentiae simplicis, duplicis, triplicis, quadruplicis &c. in partes n divisae; etenim in apposta serie $\frac{1}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, &c. est $A = 0$, cum sit Cofinus ejus $= 1$, adeoque haec Series evadit $\frac{0}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, &c. ubi Arcus singuli geminantur

E

praeter

præter primum, sed Cofinus Arcus primi est $\equiv 1$, adeoque generatus est ex Aequationibus binis $1-2z+2z=0$, $1-2xz+2z=0$, inter se comparatis; potest igitur dividi $1-2z^2+2z^2$ per $1-2z+2z$ five per $1-z \times 1-z$, adeoque facta divisione, si Quotiens dicatur $\mathcal{Q}$, tunc ex Aequationibus binis $\mathcal{Q}\mathcal{Q}=0$ & $1-2xz+2z=0$, oriatur Aequatio qua determinantur Cofinus omnes præter primum, Quapropter si ex Aequationibus binis $\mathcal{Q}=0$, & $1-2xz+2z=0$, eliminetur z , oriatur Aequatio qua determinantur Cofinus Arcuum $\frac{c}{a}$, $\frac{2c}{a}$, $\frac{3c}{a}$ &c. adeoque, si sint a, b, c, d &c. Cofinus istorum Arcuum, Divifores quantitatis $\mathcal{Q}$ erunt $1-2az+2z$, $1-2bz+2z$, $1-2cz+2z$, &c. quorum multitudo est $\frac{n-1}{2}$, cui consequens est ut Divifores quantitatis $1-z^2$ sint etiam $1-2az+2z$, $1-2bz+2z$, $1-2cz+2z$ &c. sed habet præterea Quantitas $1-z^2$ Diviforem unum binomiale $1-z$.

Itaque, cum circumferentiam in partes æquales dividi præcepi, atque ex pari quoque divisionis termino perpendiculara ad Diameter demitti, quibus determinarentur Cofinus totidem Arcuum ab eodem diametri termino incipientium, patet Cofinus -1 , & $+1$ ex Cofinum præcedentium numero excludos fuisse, nec quidem id potest proprie dici, perpendicularum ad Diameter demitti ex eo puncto quod in Diameter locatur.

Igitur, non modo inventi sunt Divifores trinomiales Binomiorum $1+z^2$, $1-z^2$, sed & divifores trinomiales Trinomii $1+2/z^2+2z^2$, five Trinomium illud potuerit dividi in Binomia, five non potuerit.

C A P U T II.

A D L E M M A II.

Post editum Tractatulum de Mensura fortis Actis Philosophicis, pro Mensibus Jan. Feb. Mart. Anno 1711. insertum, multa mihi occurrere observatu digna circa Series quasdam quarum termini ita sunt constituti, ut eorum quilibet ad totidem antecedentes semper habeat rationes datas; etenim cum in Solutione generali Problematis de Duratione Ludorum, tales obvenissent Series, quod quidem eo tempore fuerat a me obiter animadversum, credideram me non male collocaturum operam, si earum proprietates quam accurate

curate poteram exquirere: & quidem cum aliquid temporis in hac Speculatione impendissem, plurima ad hanc rem spectantia mihi comperta fuere, quarum ope mihi paruit Solutio difficultiorum aliquot Problematum quæ, cum ad Doctrinam Ludorum præcipue spectarent, fuerant a me exhibitæ in libro Anglice conscripto circa Ludos, & Anno 1716 in lucem emissio; sed cum Demonstrationes aliquot prætermissem, eas Chartis commissas apud Cl. *Newtonum* 22^o Maii 1718 reposituram, donec per biennium ab eo servatas, cum quibusdam aliis, coram Regia Societate protuleram 5^o Maii 1720: excerpta autem quædam ex iis, instigante viro eruditissimo *Johanne Machin* Societatis Regiæ Secretario, publici juris facta sunt, Anno 1722: jam omnia quæ ad hoc Lemma spectant una cum Methodo Investigationis huc transferenda censui.

Si Series aliqua ita sit constituta, ut assumptis in ea ad libitum terminis quolibet, terminus quisque subsequens ad eundem semper antecedentium numerum habeat rationes datas, talem seriem voco recurrentem; hujusmodi est subiecta Series.

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F$$

$$1 + 2x + 3xx + 10x^3 + 34x^4 + 197x^5 \text{ \&c. in qua}$$

$$D = 3Cx - 2Bxx + 5Ax^3.$$

$$E = 3Dx - 2Cxx + 5Bx^3.$$

$$F = 3Ex - 2Dxx + 5Cx^3.$$

\&c.

Quantitates autem $3x - 2xx + 5x^3$, vel etiam $3 - 2 + 1$ simul sumptas subque propriis suis signis connexas, voco Indicem seu Scalam relationis.

THEOREMA I

Si sit Progressio geometrica terminorum A, B, C, D, E \&c. quorum unusquisque sit ad proxime antecedentem ut m ad 1 ; poterit assignari relatio quedam constans, termini cujusque hujus progressionis, ad terminos duos proxime antecedentes.

Enim ex eo quod sit $C = mB$, argue $B = m^{-1}A$; multiplicetur posterior Æquatio per numerum quemlibet p , erit igitur $pB = mpA$. Sive $pB - mpA = 0$.

$$\text{Porro si ad } C = mB$$

$$\text{Addatur } pB - mpA = 0$$

$$E 2$$

Summa

Summa erit $C = \overline{m+p} \times B - mpA$

Eodem modo erit $D = \overline{m+p} \times C - mpB$

Et $E = \overline{m+p} \times D - mpC$

&c.

erit igitur scala relationis $\overline{m+p} - mp$ quæ, PROPTER p ad libitum assumptum, poterit infinite variari.

THEOREMA II.

Si detur Progressio geometrica terminorum A, B, C, D, E &c. talis ut ratio termini cujuscumque ad proxime antecedentem sit ut m ad 1 , poterit assignari relatio quadam constans, termini cujusque huius progressionis, ad terminos tres proxime antecedentes.

DEMONSTRATIO.

Etenim per Theorema I. est $D = mC - mpB$, & $C = mB - mpA$,

$$+ pC - mpB$$

sive multiplicata posteriori hac Aequatione per numerum quemlibet q , & transpositione facta, $qC - mqB + mpqA = 0$. Quamobrem

$$- pqB$$

Si ad $D = mC - mpB$

$$+ pC$$

addatur $+ qC - mqB + mpqA = 0$

$$- pqB$$

erit $D = \overline{m+p} \times C - \overline{mp+mq+pq} \times B + mpqA$
erit: idem $E = \overline{m+p} \times D - \overline{mp+mq+pq} \times C + mpqB$
& sic deinceps.

THEOREMA III.

Si detur Progressio geometrica terminorum A, B, C, D, E &c. talis ut ratio termini cujusque ad proxime antecedentem sit ut m ad 1 , poterit assignari relatio quadam constans, termini cujusque huius progressionis, ad terminos quatuor proxime antecedentes.

DEMONSTRATIO.

Per Theorema II. assumptis ad libitum numeris p & q , erit

$$\begin{aligned} E &= mD - mpC + mpqB \\ &+ pD - mqC \\ &+ qD - pqC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sed est } D &= mC - mpB + mpqA \\ &+ pC - mqB \\ &+ qC - pqB \end{aligned}$$

Sive multiplicatâ hac posteriori Equatione per numerum quemlibet s , & factâ transpositione, erit

$$\begin{aligned} sD &= msC + mpqB - mpqA \\ &- psC + mqsB \\ &- qsC + pq sB \end{aligned}$$

Ergo si ad primam Equationem, addatur hæc novissima, erit

$$\begin{aligned} E &= m + p + q + sD - mp + mq + pq + ms + ps + qsC + \\ &mpq + mps + mqs + pqsB - mpsA, \text{ pergit autem Series talium re-} \\ &\text{lationum in infinitum, \& lex Continuationis in promptu est.} \end{aligned}$$

COROLLARIUM I.

Si constituantur Progressiones duæ geometricæ, tales ut ratioi terminorum in priore sit ut m ad p , in posteriore vero ut p ad q , tum addatur terminis respondentes antè eam Serierum quædâmodo relatio summe cujuslibet ad summas binas proximæ antecedentes, quæ quidem relatio erit invariabilis: quæ & p & q summi antecedentis.

Essent autem A, B, C , termini tres r progressiois

H, K, L , termini tres z .

Cum vero sit ex primo Theoremate $C = m + pB - mpA$

$$L = p + mK - mpH$$

consequens est ut futurum sit $C + L = m + pB + K - mpA + H$

Si ponatur $x - m = 0$, itemque $x - p = 0$, tum multiplicetur

$x - m$ per $x - p$, ut habeatur Equatio $xx - mx + mp = 0$, dein-

de,

de delectur 1^{us} terminus, tum dividantur reliqui ordinati per x , 1. postremo mutantur signa omnia, eo pacto obtinebitur Scala relationis in Serie emergente ex summis prædictarum progressionum, quæ

Scala proinde erit $m + p - mp$.

Eodem modo, si dentur tres Progressiones geometricæ quarum rationes sint m, p, q ; ponatur $x - m = 0$, $x - p = 0$, $x - q = 0$. Multiplicentur hæc Equationes in se invicem ut habeatur Equatio $x^3 - mxx - mpq - mpq = 0$; Deinde delectur

$$-p x x - m q x \\ -q x x - p q x$$

Primus terminus, tum dividantur reliqui ordinati per xx , x , 1 postremo mutantur signa omnia, hinc obtinebitur Scala relationis in Serie emergente ex summis prædictarum progressionum, quæ Scala proinde erit $m - mp + mpq$

$$+p - mq \\ +q - pq.$$

COROLLARIUM III.

Si sit Series aliqua ita constituta, ut Terminus, quisque ad duos proxime antecedentes semper habeat ratione datas, ponaturque Scala relationis $a - b$, tum singatur $xx - ax - b = 0$, cujus Equationis Radices sint m & p ; poterit dividi Series data in Progressiones duas geometricas, quarum rationes sint m & p . Pari ratione, si detur Series aliqua recurrens cujus Scala relationis sit $a - b + c$; tum singatur $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$, cujus Equationis Radices sint m, p, q ; poterit dividi Series data in Progressiones tres geometricas, quarum rationes sint m, p, q , atque idem est processus in infinitum.

COROLLARIUM IV.

Si detur Series aliqua recurrens cujus Scala relationis utrunque componatur ex data partium multitudine; termini omnes alterni ad antecedentes alternos, referuntur per datam relationis Scalam ex totidem partibus constantem, quot partibus constet Scala Seriei positæ.

Etenim sint A, B, C, D, E &c. Progressiones duæ genitricæ F, G, H, K, L &c. Seriei propositæ; sit, in priori, ratio termini cujusque ad antecedentem

recta ut m ad 1, in posteriori vero, ut p ad 1. Sit Series genita ex summis terminorum respondentium utriusque Series,

P, Q, R, S, T &c.

Jam vero cum Termini A, C, E &c. alternatim sumpti constituant Progressionem geometricam in quâ ratio termini cujusque ad antecedentem sit ut m ad 1, iidemque Termini F, H, L &c. alternatim sumpti constituant Progressionem geometricam in qua ratio Termini cujusque sit ad antecedentem, ut p ad 1. palam sit ex primo Theoremate fore

$$E = mm + pp \times C - mppA$$

itemque $L = mm + pp \times H - mppF.$

proindeque fore $E + L = mm + pp \times C + H - mpp \times A + F.$

sive $T = mm + pp \times R - mppP.$

Si igitur in Serie aliqua recurrente, $a - b$ sit data relationis Scala, atque ex ea conficiatur Aequatio $xx - ax + b = 0$, ponatur etiam $xx = z$, tum ope harum Aequationum eliminetur z , orietur Aequatio $zx + 2bz + bb = 0$, ex qua deducetur Scala relationis $aa - bb.$

$-aa$

$-2b$

Adcoque si detur Series, P, Q, R, S, T , cujus relationis Scala sit $a - b$, dabitur $T = aa \times R - bbP$ quæ relatio pertinet ad terminos

$-2b$

Series alternos.

N. B. Si Radices Aequationis $xx - ax + b = 0$ sint rationales, eaeque vocentur m & p , statim conficietur Scala relationis $mm - mp$;

$+pp$

sint vero sint irrationales, Scala relationis commodius ex Aequatione $zz + 2bz + bb = 0$ deducetur.

$-aa$

Eodem modo, si Scala relationis Seriesi propositæ componatur ex tribus paribus $a - b + c$; deinde ex hac Scala conficiatur Aequatio $xx - axx + bx - c = 0$, postremo ponatur $xx = z$: tum ope istarum Aequationum expellatur x ; orietur Aequatio $z^3 + 2bzz + bbz -$

$-aa$

$2ac$

$cc = 0$, e qua deducetur Scala relationis, nimirum $aa + 2ac + cc$,

$-2b - bb$

quæ spectat ut antea ad Terminos Seriesi alternos.

Atque, pari ratione, invenietur Scala relationis pro terminis Seriesi propositæ, binis vel ternis vel quaternis intervallis a se invicem

distan-

distansibus, ponendo nempe x^1 vel x^4 , vel x^5 &c. $=z$, quantumcunque fuerit numerus partium Scalae propositae.

COROLLARIUM V.

Si detur Series aliqua recurrens cujus termini multiplicentur ordinatim per terminos Progressionis geometricae, singuli per singulos respondentes, sitque Relationis Scala Series recurrentis $a-b$, sit vero ratio termini cujusque progressionis geometricae, ad proximum antecedentem ut m ad 1; sint etiam A, B, C, D, E &c. termini Series novae ex hac multiplicatione exurgentis, tunc erit $E = aDm - bCmm$, $D = aCm - bBmm$ &c. Eodem modo sit sit Scala relationis Series propositae $a-b$ + c , tunc erit in Serie exurgente $E = aDm - bCmm + cBm$; & sic deinceps in infinitum.

COROLLARIUM VI.

Si dentur Series binae recurrentes, quarum termini respondentes in se invicem multiplicentur, singuli per singulos; dabitur Scala relationis in Serie ex hac multiplicatione oriunda. Sit Exempli gratia $a-b$ Scala relationis Series prioris, sit etiam $c-d$ Scala relationis posterioris; jam si dividatur posterior in progressionem binas geometricas, per quas multiplicetur Series prior; tum orientur ex hac Multiplicatione Series duae recurrentes quarum relationis Scalae dabuntur, sed datur Relationis Scala hujus summae per Coroll. II, & III. adeoque datur Scala relationis in Serie emergente ex multiplicatione praedicta.

Res aliquanto expeditius conficietur sequenti modo: ex Scala priore formetur Aequatio $xx - ax + b = 0$, ex Scala posteriore formetur Aequatio $yy - cy + d = 0$, pone $xy = z$, tunc ope trium Aequationum supra positarum, expungantur x & y , & obtinebitur Aequatio

$$z^4 - acz^3 + bccz^2 - abcdz + bdd = 0$$

$$- 2bd$$

$$+ aad$$

e qua conficietur Scala Relationis $ac - bcc + abcd - bdd$, ubi illud

$$+ 2bd$$

$$- aad$$

observari potest, quod si ita acciderit ut a sit $= c$, itemque $b = d$, tunc relationis Scala quae hoc in casu evadit $aa - 2aab + aabb - b^4$ poterit

$$+ 2bb$$

terit

terit ad tres terminos restringi; etenim multiplicata hac Scala ordinatim per terminos progressionis geometricae, x, x^2, x^3, x^4 , subtrahantur termini producti, ex Unitate, ut habeatur residuum

$$1 - aax + 2abxx - abbx^3 + b^4x^4 \text{ quo diviso per } 1 - bx, \text{ erit Quo-}$$

$$- 2bbxx$$

tiens $1 - aax + abbx - b^3x^3$ e quo conficietur simplicior Scala

$$+ bx - bxx$$

$$aa - aab + b^3.$$

$$- b + bb$$

THEOREMA IV.

Si detur Series aliqua recurrens cujus relationis Scala utcumque componatur ex data partium multitudine; dabitur in illa Serie terminus quilibet cujus locus sit assignatus.

DEMONSTRATIO.

Sit Series recurrens $a + br + cr^2 + dr^3 + er^4$ &c. cujus termini vocentur P, Q, R, S, T &c.

Sitque Scala relationis ex quatuor partibus constata, ita ut sit $T =$

$$frS - grrR + br^2Q - kr^4P, \text{ \& sic de ceteris: fingatur Aequatio}$$

$$x^4 - frx^3 + grrxx - br^2x + kr^4 = 0, \text{ e Scala relationis desumpta;}$$

sint m, p, q, s Radices hujus Aequationis; poterit igitur Series propolita dividi in quatuor Progressiones geometricas sequentis formae

$$A + Am + Amm + Am^3 + Am^4 \text{ \&c.}$$

$$B + Bp + Bpp + Bp^3 + Bp^4 \text{ \&c.}$$

$$C + Cq + Cqq + Cq^3 + Cq^4 \text{ \&c.}$$

$$D + Ds + Dss + Ds^3 + Ds^4 \text{ \&c.}$$

unde, comparatione facta horum terminorum cum terminis Series propolite, orientur quatuor Aequationes, quibus determinentur quantitates assumptae A, B, C, D , nimirum

$$A + B + C + D = a$$

$$Am + Bp + Cq + Ds = br$$

$$Amm + Bpp + Cqq + Dss = cr^2$$

$$Am^3 + Bp^3 + Cq^3 + Ds^3 = dr^3$$

quibus Solutis invenietur

F

A=

$$A = dr^3 - p \times r r - p q \times b r - p q s \times a$$

$$-q \quad +qs$$

$$-s \quad +qs$$

$$\frac{m - p \times m - q \times m - s}{}$$

$$B = dr^3 - q \times r r - q s \times b r - q s m \times a$$

$$-s \quad +qm$$

$$-m \quad +sm$$

$$\frac{p - q \times p - s \times p - m}{}$$

$$C = dr^3 - s \times r r - q s \times b r - s m p \times a$$

$$-m \quad +qm$$

$$-p \quad +sm$$

$$\frac{q - s \times q - m \times q - p}{}$$

$$D = dr^3 - m \times r r - m p \times b r - m p q \times a$$

$$-p \quad +mq$$

$$-p \quad +pq$$

$$\frac{s - m \times s - p \times s - q}{}$$

REGULA GENERALIS.

Nominentur, suo quæque ordine, Radices m, p, q, s &c. prima, secunda, tertia, quarta &c. Radix; sumantur tot termini Seriei propositæ: quot sunt partes in Scala Relationis; tum multiplicentur ordine retrogrado 1^o ultimus horum terminorum per unitatem, 2^o penultimus per summam Radicum post demptam primam, 3^o antepenultimus per summam rectangulorum sub singulis binis radicibus reliquis, 4^o quartus ab ultimo per summam contentorum sub singulis ternis reliquis, &c sic deinceps; tunc producta hæc omnia simul sumpta, & signis alternatim affirmativis & negativis inter se connexa, constituent Numeratorem quantitatis cui æquatur A ; porro Numerator quantitatis cui æquatur B , eadem ratione formatur ac antea, si modo dempseris secundam radicem loco primæ, &c sic de cæteris.

Quod Denominatores atinet, si hac ratione fortiantur; nimirum ex prima Radice subtrahantur seorsim reliquæ, multiplicentur quantitates omnes reliquæ in se invicem, tunc productum omnium exhibebit.

habebit Denominatorem ejus Fractionis cui aequatur A ; eodem modo formatur Denominator ejus fractionis cui B aequatur, demptis seorsum ex secunda Radice, Radicibus cæteris, multiplicatque residuis in se invicem, & sic deinceps.

Jam ex sola inspectione earum Progressionum quibus Series posita ponitur æqualis, palam est terminum quemlibet hujus Series ejus intervallum a primo termino designatur per l , æqualem fore quantitatibus $Am^l + Bp^l + Cq^l + Ds^l$, at vero quantitates omnes m, p, q, s, A, B, C, D jam determinate fuerunt, quamobrem datur terminus quilibet Series cuius locus sit assignatus.

Si loco Aequationis $x^4 - fx^3 + gx^2 - bx + k = 0$ sumeretur hæc altera

$$A = d - px - pqx - pqx^2 - q - +ps \\ -s - +qs$$

$$\frac{m - pxm - qxm - s}{m - pxm - qxm - s}$$

idemque dicendum de B, C, D , sed in expressione termini desiderati, potestas r^l supplenda erit, adeoque terminus desideratus erit $Am^l + Bp^l + Cq^l + Ds^l x^r$.

COROLLARIUM.

Si sint m, p, q, s , Radices prioris Aequationis, tunc patet Seriem recurrentem, in infinitum productam, æqualem futuram fore Fractionibus $\frac{A}{1-m} + \frac{B}{1-p} + \frac{C}{1-q} + \frac{D}{1-s}$, quarum Numeratores A, B, C, D , determinantur ut antea.

THEOREMA V.

Si Unitas dividatur per Multinomium quodcumque a Radicalitate immune, Quotiens constituet Seriem recurrentem.

DEMONSTRATIO.

Divisâ Unitate per Multinomium $1 - fx + gx^2 - bx^3 + kx^4$, fit Quotiens $P + Qx + Rxx + Sxx^2 + Txx^3$ &c. habebimus igitur hanc Aequationem

$$\frac{1 - fx + gx^2 - bx^3 + kx^4}{1 - fx + gx^2 - bx^3 + kx^4} = P + Qx + Rxx + Sxx^2 + Txx^3 + \text{&c.}$$

Multiplicetur Quotiens per Divisorem; hinc orietur nova Aequatio,

F 2

1 =

$$1 = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + Tx^4 + Ex^5 \\ - fP - fQ - fR - fS \\ + gP + gQ + gR \\ - bP - bQ + kP$$

ubi hæc potissimum observanda veniunt, 1^o terminos omnes post primum, in secundo hujus Aequationis membro, nihilo fore aequales; 2^o terminum primum solum consistere; 3^o secundum terminum ex duabus partibus constari, tertium ex tribus, quartum ex quatuor, & sic deinceps, donec perventum fuerit ad terminum cum quem ingreditur pars ultima kx^4 ; etenim terminus ille æque ac post illum reliqui omnes tot constant partibus quot sunt partes in divi-fore $1 - fx + gxx - bx^3 + kx^4$.

Ex eo igitur quod sit $T - fS + gR - bQ + kP = 0$, sequitur fore

$$T = fS - gR + bQ + kP; \text{ \& ob eandem rationem } T = 0$$

$$S = fR - gQ + bP$$

$$R = fQ - gP$$

$$Q = fP$$

ex quibus concludere licet, Coefficientes terminorum omnium post quatuor primos, si Divisor ex quinque partibus, vel post quinque primos, si ex sex partibus constet, & sic deinceps, ad antecedentes ordine retrogrado sumptos, referri per constantem Relationis Scalam, quæ Scala conficitur ex Divisore $1 - fx + gxx - bx^3 + kx^4$ delecta unitate, mutatis signis, divisisque terminis reliquis ordinatim per x, x^2, x^3, x^4 &c. adeo ut Scala Relationis fiat $f - b + g - k$; jam vero cum hæc Scala respiciat tantummodo Coefficientes terminorum Series, si desideres Scalam qua termini ipsi ad antecedentes referantur, nihil aliud faciendum erit quam ut Unitas deleatur ex Denominatore, mutanturque Signa terminorum reliquorum, servatis potestatibus quantitatis x , adeo ut Relationis Scala quæ terminos ipsos spectat futura sit $fx - gxx + bx^3 - kx^4$.

Sed Relatio quarti termini ad omnes antecedentes, si Divisor ex quinque, vel quinti, si ex sex partibus constet &c. eadem quâ prius exprimitur Scala, omisso ejus ultimo termino; & Relatio termini huic proximi versus principium Series ad omnes antecedentes, eandem sibi postulat Scalam, omittis ultimis binis ejus terminis, & sic de cæteris.

Si sumatur Aequatio quaelibet $x^3 - fx^2 + gx - hx + k = 0$, cuius Radices sint m, p, q, s erit.

$$1^{\circ} \quad p - q - s = m - f$$

$$2^{\circ} \quad pq + ps + qs = mm - fm + g$$

$$3^{\circ} \quad -pqs = m^3 - fmm + gm - b.$$

DEMONSTRATIO.

Si dividatur Aequatio proposita per $x - m$, Quotiens prodibit absque residuo, siue, quod eodem recidit, residuum aequabitur nihilo, cum ex Hypothesi quantitas m sit una ex Radicibus, sed Quotiens ille constituit Aequationem $xx + m - fxx + mm - fm + gxx + m^3 - fmm + gm - b = 0$, quæ quidem Aequatio complectitur radices reliquas p, q, s . Sed ex natura Aequationum, est

$$-p - q - s = m - f$$

$$+pq + ps + qs = mm - fm + g$$

$$-pqs = m^3 - fmm + gm - b. \quad \text{Ergo constat Propositio.}$$

COROLLARIUM I.

Cum ex supradictis pateat Fractionem quamlibet

$$\frac{1 - fr + grr - br^3 + kr^4}{1 + Rrr + Sr^3 + Tr^4} \text{ \&c. } \text{ quæ resolvi possit in tot fractiones componentes}$$

$$\frac{A}{1 - mr} + \frac{B}{1 - pr} + \frac{C}{1 - qr} + \frac{D}{1 - sr}, \text{ quot sint partes in Aequationis}$$

Scala, perspicuum est fractionem propositam, in eas ipsas componentes resolvi posse; sed ex quarto Theoremate $A = S - pR + pqQ - pqSP$

$$-q + ps$$

$$-s + qs$$

$$\frac{m - pxm - qxm - s}{1}$$

Sive ex sexto

$$A = S - m - f \times R + mm - fm + g \times Q + m^3 - fmm + gm - b \times P$$

$$\frac{m - pxm - qxm - s}{1}$$

resolva-

resolvatur igitur Numerator in hunc modum

$$S + mR + mmQ + m^2P \\ - fR - fmQ - fmmP \\ - gR + gmP \\ - bP$$

quo facto, ex mera inspectione quarti Theorematis id facile percipitur primam Columnam perpendiculararem fore aequalem nihilo, itemque secundam, itemque tertiam, & sic deinceps, donec perventum fuerit ad ultimam quae ex unico termino residuo m^2P consistat;

stat; est igitur $A = \frac{m^2P}{m - p \times m - q \times m - s}$, siue propter P aequalem unitati est

$$A = \frac{m^2}{m - p \times m - q \times m - s}, \text{ ob eandem rationem est}$$

$$B = \frac{p^3}{p - m \times p - q \times p - s}$$

$$C = \frac{q^3}{q - q \times q - p \times q - s}$$

$$D = \frac{s^3}{s - p \times s - q \times s - m}$$

COROLLARIUM II.

Si Fractio resolvenda in simpliciores, sit $\frac{1 - fr + grr - br^2 + kr^4}{r}$

ponatur $P = 0$, $Q = u$, tunc invenietur $A = \frac{mm}{m - p \times m - q \times m - s}$

$$B = \frac{pp}{p - m \times p - q \times p - s}, C = \frac{qq}{q - m \times q - p \times q - s}, D = \frac{ss}{s - m \times s - p \times s - q}$$

COROLLARIUM III.

Si Fractio resolvenda sit $\frac{rr}{1 - fr + grr - br^2 + kr^4}$ tunc positis

$$P = 0, Q = 0, R = 1, \text{ invenietur } A = \frac{m}{m - p \times m - q \times m - s}, B =$$

$$\frac{p}{p - m \times p - q \times p - s}, C = \frac{q}{q - m \times q - p \times q - s}, D = \frac{s}{s - m \times s - p \times s - q}$$

C O.

ANALYTICAE LIB. III.

COROLLARIUM IV.

Si Fractio resolvenda sit $\frac{r^3}{1-fr+grr-br^3+kr^4}$, tunc possit

$$P=0, Q=0, R=a, S=1, \text{ invenitur } A=\frac{1}{m-p \times m-q \times m-s}, B=$$

$$\frac{1}{p-m \times p-q \times p-s}, C=\frac{1}{q-m \times q-p \times q-s}, D=\frac{1}{s-m \times s-p \times s-q}.$$

COROLLARIUM V.

Quamobrem si sit Fractio resolvenda $\frac{r^3}{1-fr+grr-br^3+kr^4}$, po-

terit ea quatuor modis, hoc est uno semper amplius modo quam sit index Numeratoris, in simpliciores resolvi; nimirum, ponendo

$$A=\frac{m-p \times m-q \times m-s}{m \times m}, \text{ vel } A=\frac{mr}{m-p \times m-q \times m-s}, \text{ vel } A=$$

$$\frac{m-p \times m-q \times m-s}{m \times m}, \text{ vel } A=\frac{m^3 r^3}{m-p \times m-q \times m-s}. \text{ Idemque dicendum}$$

de reliquis B, C, D.

A D L E M M A III.

Methodus sumendi producta differentiarum unicuique Radici, & Radicibus reliquis interjacentium, in hoc nititur, quod differentiae Radicum Aequationis cujuscumque tanquam Radices alterius ejusdem Aequationis spectari possint, quo fit, ex natura Aequationum, ut ultimus hujus novae Aequationis terminus sit productum quaesitum.

Sit x Radix Aequationis cujuscunque, sit praeterea v differentia inter duas quolibet hujus Aequationis Radices, erit igitur $x+v$ etiamnum Radix Aequationis; quapropter si loco x scribatur $x+v$, obtinebitur nova Aequatio, e qua priore subtracta, residuoque divisio per v , prodibit Aequatio quaesita cujus ultimus terminus dabit productum quaesitum.

Sit, exempli gratia, Aequatio data $x^4-frx^3+gx^2-bx+k=0$; lo-

eo x scribendo $x+v$, prodibit

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 4x^3v + 6x^2vv + 4xv^3 + v^4 = 0 \\
 & -fx^3 - 3fxvv - 3fxvv - fvv^3 \\
 & + gxx + 2gxxv + gvvv \\
 & -bx - bv \\
 & + k
 \end{aligned}$$

e quâ si prior subtrahatur, residuumque dividatur per v , prodibit Aequatio

$$\begin{aligned}
 & v^3 + 4xvv + 6xxv + 4xv = 0 \\
 & -fvv - 3fxv - 3fxv \\
 & + g^v + 2gx \\
 & -b
 \end{aligned}$$

cujus terminus ultimus $4x^3 - 3fxv + 2gx - b$ exhibet productum quadraticum, idem utique quod prodiret si sumeretur Fluxio Aequationis datae $x + -fx^3 + gxx - bx + k = 0$, incognita ad instar indeterminatae spectatâ toroque diviso per Fluxionem indeterminatâ.

Sunt etiam alii quidam usus Methodi jam expostae quos brevitas gratia praterco.

Quamobrem, si sint m, p, q, s radices Aequationis propositae; palam est futurum fore ut sit

$$\begin{aligned}
 4m^3 - 3fmm + 2gm - b &= m - p \times m - q \times m - s \\
 4p^3 - 3fp^2 + 2gp - b &= p - m \times p - q \times p - s \\
 4q^3 - 3fq^2 + 2gq - b &= q - m \times q - p \times q - s \\
 4s^3 - 3fs^2 + 2gs - b &= s - m \times s - p \times s - q.
 \end{aligned}$$

hae vero novissimae conclusiones sic etiam alio modo erui poterunt, multiplicetur nimirum $m - p$ per $m - q$, itemque per $m - s$, tunc Productum erit

$$\begin{aligned}
 & m^3 - pmm + pqm - pq^2 \\
 & - qmm + psm \\
 & - smm + qsm
 \end{aligned}$$

sed ex adnotatis ad Lemma II. est

$$-p - q - smm = m - f \times mm = m^3 - fmm,$$

$$\begin{aligned}
 \text{itemque } pq + ps + qsm &= mm - fm + g \times m = m^3 - fmm + gm \\
 \text{deinde } -pq &= m^3 - fmm + gm - b.
 \end{aligned}$$

Est.

est

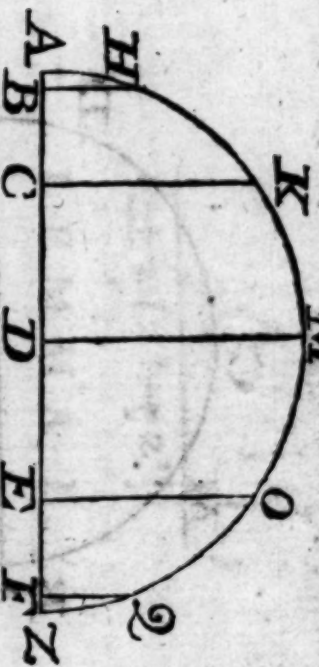
est igitur productum quæsitum $= m^3$

$$\begin{aligned} &+ m^3 - fmm \\ &+ m^3 - fmm + gm \\ &+ m^3 - fmm + gm - b \end{aligned}$$

Sive $4m^3 - 3fmm + 2gm - b$

quod erat invenendum.

Vix tamen his Methodis ad conclusiones simplicissimas pervenitur, præterquam in Aequationibus quæ paucioribus terminis constant, nisi adhibeantur considerationes quædam aliæ, quod ut exemplo uno palam fiat,



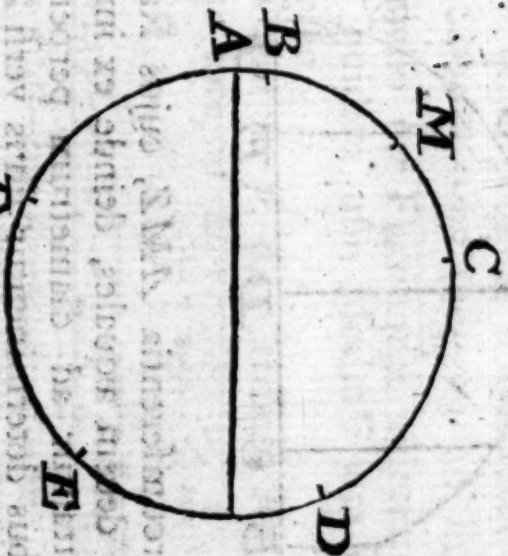
Dividatur Semicircumferentia AMZ , cujus Radius DA æqualis sit unitati, in partes decem æquales, deinde ex impari quoque divisionis termino demittantur ad diametrum perpendicularia HB , KC , MD , OE , ZF , quibus determinantur sinus versu ZB , ZC , ZD , ZE , ZF , qui ordinati nominentur m , p , q , s , t ; quibus factis, requiratur ut assignetur productum $m - p \times m - q \times m - s \times m - t$. Jam cum notum sit, ex Doctrina Sectionum Angularium, Aequationem eam quæ definiuntur quantitates m , p , q , s , t , esse

$$x^5 - \frac{50}{16}x^4 + \frac{140}{16}x^3 - \frac{100}{16}x^2 + \frac{25}{16}x - \frac{1}{16} = 0$$

facile ex Regula suprascripta id colligi poterit, productum quæsitum fore $5m - 20m^2 + \frac{105}{4}mm - \frac{25}{2}m + \frac{25}{16}$, quæ quidem expressio est satis implicata, attamen id demonstrari potest, productum quæsitum ad $\frac{1}{16}$ reducendum iri.

A D P R O B L E M A V. & VII.

Si sit Arcus $AM=A$, sumanturque alternatim ad unam & alteram partem puncti A arcus omnes, AB, AF, AC, AE, AD &c. ordinatim aequales arcubus $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}$ &c. vel sumantur in eandem semper plagam Arcus omnes AB, AC, AD, AE, AF &c. ordinatim aequales Arcubus $\frac{A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C+A}{n},$ $\frac{4C+A}{n}$ &c. tum multiplicetur unusquisque horum arcuum per $n-1$, arcus omnes ex hac multiplicatione geniti, si principium ducant a Puncto M , ordinate terminabuntur ad unumquodque punctorum B, F, C, E, D , in primo casu, vel B, C, D, E, F , in secundo.



Suggestit amicus eruditissimus qui Theoremata nostra viderat posse expressionem fractionis $\frac{a-l}{1-u}$ aliquanto simplicioreni reddi; etenim cum sint Cosinus Arcuum AM, BM, l , & sigillatim, si Sinus recti horum arcuum nominentur λ, ϵ ; facile demonstrabitur fore Cosinum differentiae, Cosinum scilicet Arcus $AB = l - \lambda\epsilon$, est igitur $a = l - \lambda\epsilon$, sive $a - l = \lambda\epsilon$, adeoque $\frac{a-l}{1-u} = \frac{\lambda\epsilon}{1-u} = \frac{\epsilon}{\frac{1}{\lambda} - u}$, poterit igitur fractio $\frac{\frac{1}{n} + \frac{1-n}{n}u}{1-2ax+ax^2}$ in hanc converti $\frac{\frac{1}{n} + \frac{1-n}{n}u}{1-2ax+ax^2}$ & sic de ceteris.



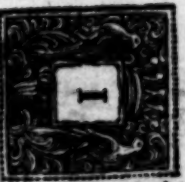
I B E R III

C A P U T I.

De Fluente Quantitatis

Fluens quantitatis $\frac{z}{2}$ est logarithmus quantitatis z e Scala qua-

dam logarithmica desumptus.



N hoc errore olim fui ut crederem expressionem $\frac{z}{2}$ non posse tuto adhiberi ad designandam Fluxionem Logarithmi quantitatis z , etenim cum aliquandiu versatus essem in constructione logarithmorum ope Serierum infinitarum, qua speculatione tunc temporis maxime delectabar, cumque percipissem fluxionem $\frac{z}{2}$ non usui fore ad eliciendas Series logarithmicas, hanc expressionem nimis precipitanter judicaveram rejici oportere, atque in ejus locum $\frac{z}{1+z}$, aut similem aliam semper substituere, donec ab eruditissimo Viro D. Johanne Bernoulli, benevole & amice literis admonitus fuerim me istud pro ut occasio id postularet, admitterem Expressionem $\frac{z}{2}$ tanquam legitimam, sepe amissuram elegantiam Solutionum, quapropter cum de hac re meditatus fu-

quam Centro, Radio DB , describatur circulus BGH secans DA in H :

tunc erit Arcus BH Fluens quantitatis $\frac{uv}{s+v}$, erit igitur $\frac{1}{DBq} \times \text{Arc.}$

BH Fluens quantitatis $\frac{v}{s+v}$, seu $\frac{z}{1+2az+zz}$

COROLLARIUM.

Si quadranda sit Curva cujus abscissa sit $z = CA$, & ordinata

$\frac{1}{1+2az+zz}$, erit $\frac{1}{DBq} \times \text{Arc. } BH$ Area Curvæ contenta extremitati A

abscissæ; eodem modo si sumatur abscissa nova CM , jungaturque

MD secans Arcum BH in R , erit $\frac{1}{DBq} \times \text{Arc. } BR$ Area Curvæ con-

tina extremitati M abscissæ CM ; erit igitur $\frac{1}{DBq} \times \text{Arc. } RH$ Area

Curvæ insitens Basi MA , & propter eandem rationem erit $\frac{1}{DBq} \times \text{Arc.}$

GH Area insitens Basi CA .

PROBLEMA II.

Invenire fluentem quantitatis $\frac{zz}{1+2az+zz}$, in qua a ponatur esse

Unitate minor.

SOLUTIO.

Positis ut antea $1 - aa = ss$, & $e + z = v$, mutabitur Fluxio

$\frac{zz}{1+2az+zz}$ in hanc alteram $\frac{vz - av}{s + v}$; sed Fluxio quantitatis $\frac{vz - av}{s + v}$, per

Lemma I. est $\frac{1}{2} \log. ss + vv$ sive $\frac{1}{2} \log. ADq$, sive $\log. AD$; præ-

terea Fluxio $\frac{vz - av}{s + v}$ ex superiori Problemate, est $\frac{CB}{DA} \times \text{Arc. } BH$; est

igitur $\log. AD - \frac{CB}{DA} \times \text{Arc. } BH$ Fluens quantitatis $\frac{vz - av}{s + v}$ sive

$\frac{1+2az+zz}{2z}$

sup. $\frac{ss + vv}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

sup. $\frac{ss + 2az + 1}{ss + 2az + 1}$

COROLLARIUM.

Si quadranda sit Area cujus altitudo z , $= CA$, ordinata vero $\frac{1}{z+2axz+z^3}$, erit, ex ante demonstratis, Area contentina extremitati A abscissae $= \log. \frac{AC}{AD} - \frac{CB}{DBq} \times \text{Arc. } BH$; eodem modo si sumatur abscissa quaedam alia CM , jungaturque DM secans arcum BH in R , erit Area contentina extremitati M novae hujus abscissae $= \log. \frac{MC}{MD} - \frac{CB}{DBq} \times \text{Arc. } BR$, est igitur $\log. \frac{AC \times MD}{MC \times AD} - \frac{CB}{DBq} \times \text{Arc. } RH$ Area Curvae insistentis Basi MA ; unde perspicuum est Aream insistentem Basi CA esse infinitam.

PROBLEMA VI.

Postea a minore Unitate, invenire fluentem quantitatis
 $\frac{z-1z}{1+2az+zz}$, seu $\frac{z}{zz+2az^3+zz^4}$.

SOLUTIO.

Dividatur Numerator per Denominatorem ordine naturali, tum invenietur Quotus, $\frac{z}{zz} - \frac{2az^{-1}z}{1+2az+zz} - \frac{z}{1+2az+zz}$; sit A Fluens quantitatis $\frac{z}{1+2az+zz}$, itemque B Fluens quantitatis $\frac{z-1z}{1+2az+zz}$, quae quidem Fluentes ambae fuerunt antea repertae, hinc palam fit fluentem quaesitam esse $= \frac{1}{z} - 2aB - A$ nomine tur haec Fluens C .

H

P R O-

PROBLEMA VII.

Positâ a minore Unitate, invenire fluentem quantitatis

$$\frac{z^{-3}z}{1+2az+zz}$$

SOLUTIO.

Diviso Numeratore per Denominatorem ordine naturali, prodibit

$$\text{Quotus, } z^{-3}z - \frac{2az^{-3}z}{1+2az+zz} - \frac{z^{-1}z}{1+2az+zz}, \text{ ideoque Fluens}$$

quaesita erit $= -\frac{1}{2z} - 2aC - B$; idemque est processus in infinitum.

COROLLARIUM I.

Quapropter si sit a minor Unitate, & θ numerus quilibet integer, Fluens quantitatis $\frac{z^{-\theta}z}{1+2az+zz}$, methodo superius exposita obtineri poterit.

Istud autem sic alio modo demonstrari potest, pone $z = \frac{1}{v}$, tunc

convertetur data Fluxio $\frac{z^{-\theta}z}{1+2az+zz}$, in aliam sibi aequalem

$\frac{v^{\theta}v}{1+2av+vv}$, cuius Fluens ex Corollario I. Problematis quarti obinebitur.

COROLLARIUM II.

Et simili processu quo usi fuimus in Corollario II. Problematis quarti, hoc concludi poterit, quod si sit a minor Unitate, & θ numerus quilibet negativus & fractus, poterit obtineri Fluens quantitatis

$$\frac{z^{\theta}z}{1+2az+zz}.$$

COROLL-

COROLLARIUM III.

Igitur ex antedictis perspicuum est fluentem quantitatis $\frac{x^p z}{1+2az+zz}$,

ubi ponatur esse a minor Unitate, semper obtineri posse, siue fuerit θ numerus affirmativus aut negativus, integer aut fractus.

PROBLEMA VIII.

Posita a majore Unitate, invenire fluentem quantitatis

$$\frac{z}{1+2az+zz}.$$

SOLUTIO.

Posito Denominatore $1+2az+zz=0$, sint m & p Radices hujus Aequationis; tunc ex Corollario I. Theorematis VI. Lib. II. id patebit, Fluxionem propositam resolvi posse in componentes duas

$$\frac{\frac{mz}{m-p} \frac{1}{1-mz}}{1-\frac{pz}{m-p}} + \frac{\frac{pz}{p-m} \frac{1}{1-mz}}{1-\frac{pz}{p-m}},$$

siue $\frac{1}{m-p} \times \frac{mz}{1-mz} - \frac{pz}{1-pz}$, sed ex Lemmate I. hujus libri, Fluens quantitatis $\frac{mz}{1-mz}$ est $\log. \frac{1}{1-mz}$, & Fluens quantitatis $\frac{pz}{1-pz}$ est $\log. \frac{1}{1-pz}$, adeoque est $\frac{1}{m-p} \times \log. \frac{1-\frac{pz}{m-p}}{1-mz}$ Fluens quantitatis propositae.

COROLLARIUM.

Si ponatur $\sqrt{aa-1}=s$, tunc erit $m=s-a$, $p=-s-a$, adeoque poterit Fluens quaesita exprimi per $\frac{1}{2s} \log. \frac{1+sz+az}{1-sz+az}$.

PROBLEMA IX.

Posito θ numero integro, invenire fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta} z}{1+mz}$.

SOLUTIO.

Fluens quaesita commodè exprimi poterit per Seriem infra positam, nimirum

H 2

 $\frac{\theta m}{z^{\theta}}$

$\frac{z^{\theta}}{\theta m} - \frac{z^{\theta-1}}{\theta-1 \times m m} + \frac{z^{\theta-2}}{\theta-2 \times m^2} - \frac{z^{\theta-3}}{\theta-3 \times m^3} \mathcal{E}c. \pm \frac{1}{m^{\theta+1}} \log. \frac{1}{1+mz}$,
 quæ ad tot terminos ante ultimum logarithmicum continuatur, quot
 sunt Unitates in numero θ .

P R O B L E M A X.

Posito θ numero integro, invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{-\theta} z}{1+mz}$.

S O L U T I O.

Fluens quæstia exprimitur per Seriem

$-\frac{1}{\theta-1 \times z^{\theta-1}} + \frac{m}{\theta-2 \times z^{\theta-2}} - \frac{m m}{\theta-3 \times z^{\theta-3}} \mathcal{E}c. \pm m^{\theta-1} \times \log. \frac{1+mz}{z}$,
 quæ ad tot terminos, ante ultimum logarithmicum, continuatur
 quot sunt Unitates in $\theta-1$.

P R O B L E M A XI.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\frac{1}{\lambda}} z}{1+mz}$.

S O L U T I O.

Pone $z^{\frac{1}{\lambda}} = v$, & $\lambda + \delta - 1 = \theta$, tunc convertetur Fluxio data in
 hanc alteram sibi æqualem $\frac{\lambda v^{\theta} v}{1+m v^{\lambda}}$, pone iterum $m^{\frac{1}{\lambda}} v = y$, & re-
 ducetur Fluxio data ad $\frac{\lambda}{\sqrt[m]{m}} \times \frac{y^{\theta} y}{1+y^{\lambda}}$: quæ conclusio aliquanto ci-
 tius obtinebitur, ponendo $\sqrt[m]{mz}^{\frac{1}{\lambda}} = y$; eodem modo, positis $\sqrt[m]{mz}^{\frac{1}{\lambda}} = y$,

& $\lambda + \delta - 1 = \theta$, reducetur Fluxio quantitatis $\frac{z^{\frac{1}{\lambda}} z}{1+mz}$ ad $\frac{\lambda}{\sqrt[m]{m\delta+1}} \times$

$\frac{y^{\theta} y}{1+y^{\lambda}}$.

Jam

Jam vero potest Fluxio $\frac{y^j}{1 \pm y^n}$ vel omnino resolvi in componentes trinomiales hujus formæ $\frac{y^j}{1 + 2ay + yy}$, quibus in singulis, est quantitas a , ut & quantitas quælibet alia ipsi analoga, minor Unitate, vel in componentes quarum una vel ad plurimum duæ erunt binomiales hujus formæ $\frac{py^j}{1 \pm y}$, reliquæ vero trinomiales ejusdem generis ac supra, quemadmodum id demonstratum fuit in Libro I; porro in omnibus hisce casibus Fluents inveniri possunt, adeoque Fluens quantitatis datæ invenietur.

PROBLEMA XII.

Invenire fluentem quantitatis $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1 + 2lz^n + z^{2n}}$, *ubi sit 1 minor Unitate.*

SOLUTIO.

Quandoquidem potest Ordinata $\frac{1}{1 + 2lz^n + z^{2n}}$ omnino resolvi in componentes trinomiales quadraticas, patet ex antedictis posse Fluxionem datam ad fluentem suam adduci qualiscunque fuerit Index θ , affirmativus aut negativus, integer aut fractus.

Si Fluxio data sit $\frac{z^{\frac{\theta}{2}}}{1 + 2lz^n + z^{2n}}$, multiplicentur tum Numerator tum Denominator per z^{2n} , & converteretur Fluxio data in $\frac{z^{\frac{\theta}{2} + 2n}}{1 + 2lz^{2n} + z^{2n}}$, cujus Fluens invenietur.

PROBLEMA XIII.

Invenire fluentem quantitatis $\frac{z^{\frac{1}{n}}}{1 + 2lz^{\frac{n}{n}} + z^{\frac{2n}{n}}}$, *posita 1 minore Unitate.*

noe Unitate.

PROBLEMA XIII.

SOLUTIO.

Pone $z^{\lambda^{\pi}} = x$, tunc convertetur Fluxio data in aliam sibi æqualem
 $\frac{\lambda \pi x^{\lambda \pi - 1} x}{1 + a/x^m + x^{2\lambda \pi}}$, cujus Fluens ex prius dictis inveniri poterit.

PROBLEMA XIV.

Invenire fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta} z^2}{1 + z^n}$

SOLUTIO.

Potest Ordinata $\frac{1}{1 + z^n}$ dividi in componentes, vel omnes trinomiales hujus formæ $\frac{m + mz}{1 - 2az + z^2}$, in quarum unaquaque, erit quantitas a , ut & quantitas quælibet alia ipsi analogæ, minor Unitate; vel in componentes partim trinomiales ejusdem formæ, partim binomiales hujus formæ $\frac{m}{1 + z}$, quarum omnium ope, Fluens quaesita invenietur.

PROBLEMA XV.

Posita 1 majore Unitate, invenire fluentem quantitatis

$$\frac{z^{\theta} z^2}{1 + 2z^n + z^{2n}}$$

SOLUTIO.

Potest Fluxio data in binas alteras binomiales dividi, quarum subsidio Fluens quaesita invenietur.

Illud observandum est de Fluxione $\frac{z^{\theta} z^2}{1 + z^n}$, eam converti posse in aliam sibi æqualem, sed simpliciolem: si ita acciderit ut Fractio $\frac{\theta + 1}{n}$ ad terminos minores $\frac{1}{\lambda}$ possit redigi; etenim posito $z^{\lambda^{\pi}} = v^{\lambda}$, convertetur Fluxio data in hanc sibi æqualem sed simpliciolem, nimium

rum $\frac{\frac{\lambda}{n} v^{l-1} \dot{v}}{1+v^{\lambda}}$, idemque dicendum de Fluxione $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+2/z^n + z^{2n}}$

Quæ autem dicta sunt de Fluentibus quantitarum $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+z^n}$.

$\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+2/z^n + z^{2n}}$, ea facile accommodari poterunt Fluentibus quantitarum $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{e+fz^n}$, $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{e+fz^n+gz^{2n}}$.

PROBLEMA XVI.

Invenire Fluentem quantitatis $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+2/z^n + z^{2n}}$, ubi ponatur 1 mi-

nor Unitate *sive* $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+z^n}$.

SOLUTIO.

Sit P Fluens quantitatis $\frac{z^{\theta} \dot{z}}{1+z^n}$, quam inveniri posse ante osten-

dimus; tunc erit Fluens quaesita $= \frac{1}{n} \frac{z^{\theta+1} \dot{z}}{1+z^n} + \frac{n-\theta-1}{n} \frac{1}{z} \times P$.



CAPUT II.

LEMMA I

Si detur Fractio quælibet cujus Denominator utcumque conficitur ex Binomiis, Trinomiis, Quadrinomiis &c. ad potestates quaslibet datas, sed integras evectis, Numerator vero sit Unitas; fractio prædicta in totidem fractiones resolvi poterit quot sunt Binomia, Trinomia aut Quadrinomia in ejus Denominatore, quarum Fractio quæ Denominatores singulis singulis respondent, erunt ipsæ potestates & quibus constituitur Denominator Fractionis propositæ.

Quoniam vero hoc satis pateat ex iis quæ ante dicta fuerunt de Ordinatibus rationalibus in simpliciores resolvendis, attamen, ne quis sit dubitationi locus, lubet mentem nostram fufius explicare, cui præstando nihil magis proderit quam Exemplorum appositio.

Sit igitur Fractio $\frac{1}{1-mx+1-p^2x}$, quam resolvi oporteat in componentes simpliciores.

Finge fractionem datam esse $\frac{1}{1-mx+1-p^2x}$, posita scilicet

$q=p$. jam cum in II. Libro id demonstratum fuerit, fractionem illam resolvi posse in simpliciores $\frac{mm}{m-pxm-qx+1-mx}$ + $\frac{pp}{p-mxp-qx+1-px}$

+ $\frac{qq}{q-mxq-px+1-qx}$, illud statim percipitur, fractionem primam evadere $\frac{mm}{m-p^2x+1-mx}$, at vero fractiones binæ reliquæ, sigillatim

sumptæ, propter factores nihilo æquales $p-q$ & $q-p$ in utroque denominatore positos, sunt infinite magnæ; attamen earum summa quæ quidem in differentiam vertitur ob signa contraria quantitatum $p-q$ & $q-p$, finita evadit; quocirca si fractiones illæ in unum addantur,

dantur, earum summa divisis. Numeratore & Denominatore per

$$p-q, \text{ prodibit } \frac{pq-mp-mq-mpqx}{p-mxq-mx1-px1-qx}, \text{ seu } \frac{pp-2mp+mppx}{m-p^1 \times 1 - p^1 x^1}.$$

Eodem modo, si id requiratur ut Fractio $\frac{1}{1-mx1-px^1}$ in suas
componentes simpliciore resolvatur, finge eam esse

$$\frac{1}{1-mx1-px1-qx1-sx}, \text{ positis scilicet } q=s=p, \text{ tum ex iis}$$

$$1^2 = \frac{m^3}{m-pxm-qxm-sx1-mx}, 2^2 = \frac{p^3}{p-mxp-qxp-sx1-px}, 3^2 =$$

$$\frac{q^3}{q-mxq-pxq-sx1-qx}, 4^2 = \frac{s^3}{s-ms-pxs-qx1-sx}, \text{ quarum si}$$

tertia secundæ jungatur, Numerator & Denominator summae poterunt sigillatim dividi per $p-q$; qua divisione facta, si huic deinceps summae addatur tertia fractio, tunc Numerator & Denominator hujus novae summae poterit sigillatim dividi per $p-sxq-s$, adeoque summa ternarum erit $\frac{-3mmp-3mp^1p-p^1+3m^1p^1p-p^1xs-m^1p^1xs}{m-p^1 \times 1 - p^1 x^1}$,

$$\text{prima vero, solo conspectu, statim redigitur ad } \frac{m^3}{m-p^1 \times 1 - mx}, \text{ at-}$$

que eodem modo pergere licet ad casus altiores & quantumvis compositos.

Quinetiam si Fractiones simplices in quas proposita resolvi fingitur contineant quantitates imaginarias, tunc quicquid est imaginarii semper destruetur per additionem binarum quarumque fractionum simplicium easdem imaginarias involventium, de quo Exempla quaedam allata sunt, & plura fortasse afferentur.

Cum igitur neque aequalitas factorum, neque quantitates imaginariae quibus factores affici possunt, impediant quominus fractiones simplices toties ad se invicem addantur, quoties sit necesse ad id efficiendum ut earum Denominator communis adaequet aliquem e factoribus fractionis propositae, palam est constare veritatem propositionis nostrae.

Hæc confirmari poterunt methodo Comparationum ad hunc modum.

Sumatur, exempli gratia, fractio $\frac{1}{1-mx \times 1-px^2}$, quam hac Metho-

thodo in simplices resolvì oporteat, pone fractiones in quas posita resolvitur, esse $\frac{A}{1-mx} + \frac{B+Cx}{1-px^2}$, tum insinuatæ Equatione

inter fractionem propositam & fractiones assumptas, erit

$$\frac{1}{1-mx \times 1-px^2} = \frac{A}{1-mx} + \frac{B+Cx}{1-px^2}, \text{ unde orietur } Ax \times 1-px^2 +$$

$$B+Cx=1 \text{ sive}$$

$$A-2Ap \times + App \times \times$$

$$+ B - Bmx$$

$$= 1$$

$$+ Cx - mCx \times$$

pone $A+B=1$, $-2Ap-mB+C=0$. $App-mC=0$, quo facto

$$\text{reperies } A = \frac{mm}{m-p^2}, B = \frac{pp-2pm}{m-p^2}, C = \frac{mpp}{m-p^2}, \text{ adeoque fracti-}$$

ones simplices eadem erunt quæ ante repertæ fuerant.

Hac data occasione, non alienum erit ostendere quæ debeat sumi multitudo terminorum in Numeratore fractionis cujlibet simplicis ex earum numero in quas proposita est resolvenda, quibusque indicibus termini Numeratoris sint afficiendi.

Sit igitur n maxima communis mensura indicum omnium quos proposita complectitur, p index maximus Denominatoris fractionis cujlibet simplicis, λ index potestatis ad quam Denominator ille attollitur, tunc multitudo terminorum qui sumi debeant erit $\frac{p\lambda}{n}$, factâ differentiâ indicum n , constructoque indice primi termini $=0$, sed ut ad rem revertamur.

Cum in ejusmodi Comparationibus, Coefficientes assumptæ omnino determinentur per Equationes simplices, nihil est periculi ne in absurditates imaginariarum quantitarum possis incidere; attamen aliud genus repugnantiae oriri poterit nisi caute procedas, nimirum si acciderit ut aliqua ex Coefficientibus inveniatur æqualis tum numero uno, tum altero; quod si ita eveniat, indicio est aliquid indeterminati latere in assumptionibus, seu aliquid involvi in una Equationibus quæ jam involvebatur in aliqua ex cæteris; quod in-

com-

commodum ut videretur, communes divisores omnes factorum sedulo sunt examinandi & seponendi, ut ex iis potestates Binomiorum, Trinomiorum &c. ferrentur; quo observato, incongruitates omnes effugientur; atque adeo confirmatur veritas Propositionis nostræ.

Ex iis quæ diximus, quæ quidem paucis verbis hanc Comparationum methodum complectuntur, facile erit Canones seu Theoremata construere quibus casus particulares uno quasi intuitu solvantur, cujus generis est Canon infra subiectus, quo fractio apposta

$\frac{1}{1-mx \times 1-px^{\lambda}}$ in binas alteras dividetur hujus sequentis formæ

$\frac{A}{1-mx} + \frac{B+Cx+Dxx+Ex^3 \&c.}{1-px^{\lambda}}$ etenim reperietur esse $A =$

$$\frac{m^{\lambda}}{m-p^{\lambda}}, B = \frac{m-p^{\lambda}-m^{\lambda}}{m-p^{\lambda}}, C = \frac{Bm+\lambda m^{\lambda}p}{m-p^{\lambda}}, D = \frac{Cm+\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda-1}{2} m^{\lambda}p^2}{m-p^{\lambda}},$$

$$E = \frac{Dm+\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-3}{2} m^{\lambda}p^3}{m-p^{\lambda}} \&c.$$

LEMMA II.

Posito λ numero integro, Quadratura Curvæ cujus Ordinata est

$$\frac{2^{\lambda-1}}{e+fz^{2\lambda}}^{\lambda+1}, \text{ vel obtineatur accurate, vel pendet a Quadratura}$$

Conicarum Sectionum.

Etenim ex iis quæ tradita fuerunt a Cl. Viris Newtono & Costafno, si sit A Area Curvæ datæ, F Area Curvæ cujus Ordinata sit $\frac{2^{\lambda-1}}{e+fz^{2\lambda}}^{\lambda+1}$, tunc ponendo $e+fz^2=R$, reperietur esse $A =$

$\frac{\theta - \lambda m \times F - z^\theta R^{-\lambda}}{\lambda m e}$, adeoque si fuerit $\theta = \lambda m$, Curva data quadrabitur

accurate; sin minus, ejus Area pendeat ab Area Curvæ cujus Ordi-

nata sit $\frac{z^{\theta-1}}{e + f z^{2n} \lambda^{-1}}$, quæ Area si nominetur G , erit

$F = \frac{\theta - \lambda - 1 \times m G - z^\theta R^{-\lambda-1}}{\lambda - 1 \times m e}$, adeoque si sit $\theta = \lambda - 1 \times m$, Curva F ac-

curate quadrabitur, quo efficietur ut Area A quæ pendet ab Area F itidem quadrari possit accurate; sin minus id contigerit, Area F pendebit ab Area G , hæc vero pendebit a nova Area cujus Ordinata erit

$\frac{z^{\theta-1}}{e + f z^{2n} \lambda^{-2}}$, & sic deinceps; ergo si fuerit index λ numerus integer, index ille decrescet donec ad Unitatem pervenerit; Quadratura

igitur Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{e + f z^{2n} \lambda^{-1}}$ vel obinetur accurate,

vel pendet ab Area Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{e + f z^{2n}}$, quæ ipsa pendet a Circulo aut Hyperbola aut ab utraque.

L E M M A III.

Posito λ numero integro, Quadratura Curvæ cujus Ordinata est $\frac{z^{\theta-1}}{e + f z^{2n} + g z^{2n} \lambda^{-1}}$, vel obinetur accurate, vel pendet a Quadratura Conicarum sectionum.

Quo vero ad hanc assertionem probandam pateat aditus, pauca quadam ex *Newtono* & *Cotesio* describere mihi visum est: Sit igitur $\frac{z^\theta}{R^\lambda}$ Area Curvæ; jam si sumatur Fluxio hujus Area, ea reperietur esse $\frac{z^{\theta-1}}{\theta z R - \lambda R z \frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda-1}}}$, pone jam R esse $e + f z^{2n} + g z^{2n}$, inde

$R =$

$R = nfx^{n-1}z + 2mgx^{n-1}z$, quo valore substituto in locum R , & scripta 1 pro z , Ordinata Curvæ prædictæ erit

$$\theta ez^{\theta-1} + \theta \frac{z^{\theta-1}}{\lambda nfx^{\theta+n-1}} + \theta \frac{z^{\theta-1}}{2\lambda nmgx^{\theta+n-1}}, \text{ porro si Ordinata ex}$$

variis partibus constet, partes singulæ pro Ordinatis Curvarum totidem habendæ sunt; quo constituto, sequitur ut si sit A Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R_{\lambda+1}}$, B Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+n-1}}{R_{\lambda+1}}$, C

Area Curvæ cujus Ordinata $\frac{z^{\theta+n-1}}{R_{\lambda+1}}$, tunc erit

$$\theta eA + \theta \frac{z^{\theta-1}}{\lambda nfx} B + \theta \frac{z^{\theta-1}}{2\lambda nmg} C = z^{\theta} R^{\lambda}, \text{ \& propter eandem rationem,}$$

si sit D Area Curvæ cujus Ordinata sit $\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, erit

$$\theta eB + \theta \frac{z^{\theta-1}}{\lambda nfx} C + \theta \frac{z^{\theta-1}}{2\lambda nmg} D = \frac{z^{\theta+n}}{R^{\lambda}}. \text{ Sic nunc } F \text{ Area Curvæ cu-}$$

jus Ordinata $\frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, itemque sit G Area Curvæ cujus Ordinata

$$\frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$$

, tunc propter incisissimam similitudinem erit

$$e + fzx + gx^m = R, \text{ si omnia ducantur in } \frac{z^{\theta-1}}{R_{\lambda+1}}, \text{ erit}$$

$$\frac{e z^{\theta-1} + f z^{\theta+n-1} + g z^{\theta+n-1}}{R_{\lambda+1}} = \frac{z^{\theta-1}}{R^{\lambda}}, \text{ tum etiam}$$

$$\frac{e z^{\theta+n-1} + f z^{\theta+n-1} + g z^{\theta+n-1}}{R_{\lambda+1}} = \frac{z^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}},$$

adeoque erit $eA + fB + gC = F$, itemque

$$eB + fC + gD = G.$$

Habemus igitur quatuor Aequationes quibus sex Arcuum A, B, C, D, F, G , relationes possint determinari, quamobrem si ex his quatuor Aequationibus, quantitates quolibet ternæ expellantur, manebit Aequatio qua relatio inter ternas reliquas exprimitur, adeoque expul-
sis B, C, D , reperietur

$$A =$$

$$A = \frac{\theta + 2\lambda x f + 2\theta - 4\lambda x g \times F + \theta - n + 2\lambda x f g G - f f - 2e g x^2 R^{-\lambda} - f g x^2 R^{-\lambda} + R^{-\lambda}}{n \lambda x 4 e g - f f}$$

quibus positis; perspicuum est Quadraturam accurate exhibitum iri, si ita acciderit ut $\theta + \lambda x f$ sit $= 4\lambda n - 2\theta x e g$, eodemque tempore $n - 2\lambda n = \theta$; sin vero neutrum, vel alterum duntaxat acciderit, tunc

Quadratura Curvæ cujus Ordinata $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$ pendeat a quadratura bina-

rum Curvarum quarum Ordinatae sint $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$ & $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, vel ab ea-

rum altera; jam Ordinata Curvæ cujus Ordinata $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, pendet a bi-

nis Arcis quarum Ordinatae sint $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda-1}}$ & $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$, quadratura vero

Curvæ cujus Ordinata $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$ pendet a binis Arcis quarum Ordi-

natae sint $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$ & $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$; ergo Curvæ ternæ exortæ sunt, nisi

fortasse earum aliquæ exciderint Coefficientium limitatione, e quarum Arcis, Area Curvæ propositæ pendet: jam si earum unaquæque sit Quadraturæ capax, Curva proposita quadrabitur accurate, sin acciderit ut earum nulla vel earum una aut altera tantum possit quadrari, unaquæque earum quæ restant ad quadrandum pendeat a quadratura Curvarum binarum in quarum utraque, Ordinata afficietur Denominatore $R^{\lambda-2}$, ergo perpetua Diminutione indicium, tandem pervenietur ad Unitatem, ad quam cum perventum erit, Curvæ illæ, e quarum Arcis, Area Curvæ propositæ pendet, ipsæ compententur ab Arcis Conicarum sectionum pendere.

Ne vero quis putet hanc Demonstrationem posse convelli, ex eo quod possit accidere ut quantitatæ $4e g - f f$ sit nihil. Aequalis, quo fiet ut Area A ex Aequatione ejiciatur; id satis erit animadvereri Cur-

vam cujus Ordinata est $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$ seu $\frac{x^{\theta-1}}{e - f x^2 n - g x^2 n \lambda + 1}$, hoc in casu ad

Bino-

Binomium referri, etenim hæc ordinata equipollet huic alteræ

$\frac{4z^{n+1} - 1}{z}$, quæ ideo pendebit a quadratura Curvæ cujus Or-

dinata erit $\frac{z^{\theta-1}}{2e + fz^p}$.

COROLLARIUM.

Si detur Fractio cujus Denominator sit Unitas, vel potestas qualifcunque integra aut fracta indeterminatæ z , Denominator vero sit Multinomium rationale compositum ex datis & indeterminata z , possitque Multinomium illud resolvi in Binomia aut Trinomia aut utrumque, vel in eorum potestates; Curva cujus Abscissa est z Ordinata vero fractio prædicta, vel accurate quadrabitur vel habebit Quadraturam pendentem a Sectionibus conicis.

CAPUT III.

De Ordinatis quibusdam irrationalibus ad Rationalitatem

reducendis.

Uanquam non erat mei institui quiddam dicere de Curvis irrationalibus quæ adeo fuscæ & erudite tractatæ fuerunt a Cl. Viris *Newtono* & *Cotesio*, attamen cum perpenderem Binomia quadam & Trinomia Radicalitate sua exui posse, eaque idcirco cum Curvis rationalibus habere affinitatem, non præterire potui quin pauca quadam de hoc argumento attingerem, quamvis si attente consideretur Methodus a *Cotesio* ad hanc rem adhibita, artificium quo id conficitur non poterit diu latere.

Sit igitur $z^{\theta} = 2e + fz^{n\lambda}$ Ordinata irrationalis, posito nimirum λ numero fracto; fac esse $e + fz^n = v$, hinc erit $fz^n = v - e$. adeoque sumptis Fluxionibus, erit $nfz^{n-1}z = v$, quæ Aequatio si per proximam superiorem dividatur, erit $\frac{z}{z} = \frac{1}{v-e}$, sed ex quod sit

$$fz^n =$$

$fx^n = v - e$, erit $z^{\theta+1} = \frac{v - e^{\frac{\theta+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}}$, quibus ductis in $\frac{z}{x}$, erit

$$z^{\theta} \dot{z} = \frac{\frac{1}{n} v \times v - e^{\frac{\theta-n+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}} \quad \text{quapropter Fluxio invenietur } z^{\theta} z \dot{x} e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} v \lambda v \times v - e^{\frac{\theta-n+1}{n}}}{f^{\frac{\theta+1}{n}}} ; \text{ ergo nihil magis requiritur ad irrationalitatem}$$

collendam, quam ut $\frac{\theta-n+1}{n}$ sit quantitas integra; sed $\frac{-n}{n} = -1$, pone igitur $\frac{\theta+1}{n} = r$, qui si fuerit numerus integer, irrationalitas tolleretur, & erit Area Curvæ cujus Ordinata $z^{\theta} x e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}$ equalis Arcæ Curvæ cujus Ordinata $\frac{1}{n} v \lambda \frac{v \times v - e^{r-1}}{f^r}$.

NB. Irrationalitas tolli dicitur, si cum affecerit terminos duos aut plures inter se conjunctos signis + aut -, vel omnino evanescat vel ad terminum unicum transferatur.

Si igitur Quantitas z^{θ} extra vinculum posita, ad hanc formam redigi possit, nimirum $rx-1$, posito r numero integro, tunc Ordinata Radicalitate sua liberabitur ponendo $e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}} = v$, vel etiam $e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}} = v$; vel si sit $\lambda = \frac{p}{q}$, ponendo $e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} \frac{1}{q}$ seu $\sqrt[q]{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}} = v$, quæ novissima positio constanter a *Cotesio* usurpatur.

Cum vero, sive posueris $e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}} = v$, sive $\frac{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}}{z^n} = v$, possis in utroque casu valorem rationalem quantitatis z^n elicere, pone nunc

$$\frac{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}}{z^n} = v, \text{ quo posito, erit } z^n = \frac{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}}{v}, \text{ adeoque } \frac{z}{x} = \frac{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}}{v f^{\frac{\theta+1}{n}}},$$

$$z^{\theta+1} = \frac{e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}}}{v f^{\frac{\theta+1}{n}}}, \quad e^{-\frac{\theta-n+1}{n}} f^{\frac{\theta+1}{n}} = \frac{e^{\lambda v \lambda}}{v f^{\frac{\theta+1}{n}}}. \quad \text{Ex quibus sit ut Area}$$

Curvæ

ANALYTICA BIBL. III.

Curvæ cujus Ordinata $z^n x e^{+fx^m}$ possit iterum converti in aliam

sibi æqualem cujus Ordinata sit $\frac{-\frac{1}{n} x e^{\frac{v^2}{\theta+1+n\lambda}}}{v - \sqrt{\theta^2 + n + 1 + n\lambda}}$, ergo si fuerit

$\frac{\theta+1+n\lambda}{n}$ numerus integer, irrationalitas tolletur; pone igitur $\frac{\theta+1+n\lambda}{n}$

æqualem numero integro r ; hinc erit $\theta = rn - \lambda n - 1$, proinde si

Ordinata hanc habeat formam $z^{rn-\lambda n-1} x e^{+fx^m}$, eam radicalitate

sua liberabis; ponendo $\frac{e+fx^m}{z^n} = v$, etenim, hoc in casu, Area huic

Ordinatæ competens converteretur in aliam sibi æqualem cujus Ordi-

natis erit $\frac{-\frac{1}{n} e^r v \lambda}{v - \sqrt{r^2 + 1}}$.

Si sit $\lambda = \frac{1}{r}$, tum magis ponere $\sqrt{\frac{e+fx^m}{z^n}} = v$, Area cujus Or-

dinata est $z^{rn} - \frac{1}{r} x e^{+fx^m}$ converteretur in aliam sibi æqualem

cujus Ordinata erit $\frac{-\frac{1}{n} q e^r v^2 + q - 1}{v^2 - \sqrt{r^2 + 1}}$.

Quod ad Trinomia attinet, ea nullo modo, quod sciam, Radicalitate sua exui poterunt, nisi in casu unico simplicissimo, cum ita nempe acciderit ut vinculum Trinomiali sit Radix quadratica, tum etiam ut Potestas indeterminatæ z extra vinculum posita ad hanc formam redigi possit, z^{rn-m} , posito utique r numero integro; quo in casu cuilibet experienti constabit, sublatione secundi termini, Trinomialium ad Binomialium vel Binomia adductum iri, quorum unumquodque ita afficietur potestatibus extra vinculum positis, ut Radicalitate sua liberari possit.

Sed Trinomialium illud multo facilius & concinnius ad Binomia revocari poterit extractione Radicis quadraticæ, ad hunc modum.

Sit igitur $z^{rn-1} \sqrt{e+fx^m+gz^{2n}}$ Ordinata irrationalis quam Radicalitate sua exui oporteat; singe $\sqrt{e+fx^m+gz^{2n}} = m + v z^n$, posito scilicet $mm = e$, hinc erit $e+fx^m+gz^{2n} = mm + 2mvz^n + v^2 z^{2n}$, tunc de-

K

letis hinc inde aequalibus, residuoque diviso per z^n , prodibit

$f + gz^n = 2mv + vvz^n$, ex quo elicietur $z^n = \frac{2mv - f}{g - vv}$, adeoque erit

$\frac{z}{z} = \frac{\frac{2}{n} \times \frac{v \times mg - fv + mvv}{2mv - f \times g - vv}}{\frac{2mv - f}{g - vv}}$, sed $z^n = \frac{2mv - f}{g - vv}$, ex quibus efficie-

tur ut $z^{n-1} z$ fit $= \frac{\frac{2}{n} v \times fg - fv + mvv \times 2mv - f^{n-1}}{g - vv^{n-1}}$, sed ex eo

quod fit $z^n = \frac{2mv - f}{g - vv}$, erit $\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$, sive $m + vz^n$

$= \frac{mg - fv + mvv}{g - vv}$, adeoque $z^{n-1} z \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}} =$

$\frac{\frac{2}{n} v \times mg - fv + mvv^2 \times 2mv - f^{n-1}}{g - vv^{n-1}}$.

$g - vv^{n-1} + 1$

Ex his igitur hanc conclusionem deducere licet, si sit

$z^{n-1} \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$ Ordinata Curvæ cujus Abscissa z , ponaturque $\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}} = v$, tunc posita $m = \sqrt{e}$, Area Curvæ, Ordina-

te datæ competens, convertetur in aliam sibi æqualem cujus abscissa v & ordinam applicata $\frac{\frac{2}{n} \times mg - fv + mvv^2 \times 2mv - f^{n-1}}{g - vv^{n-1} + 1}$, ex quo

perspicuum est Ordinatam datam Radicalitate sua liberatum iri, si id acciderit ut numerus r sit integer.

Atque eadem ratione, si Ordinata Curvæ sit $\frac{z^{n-1}}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$, po-

natunque ut antea $\frac{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}} - \sqrt{e}}{z^n} = v$, tunc Area Curvæ cui

Ordinata data competit, convertetur in aliam sibi æqualem cujus Abscissa v , & Ordinam applicata $\frac{\frac{2}{n} \times 2mv - f^{n-1}}{g - vv^{n-1}}$.

COROLLARIUM.

Si quantitas $2^n-1 \sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$, dividatur per Binomium aut Trinomium rationale $k+bz^n$, $l+mz^n+pz^{2n}$, aut facta quocunque ex talibus Binomiis aut Trinomiis inter se multiplicatis, aut per eorundem potestates quilibet integras, cum dicta quantitas sic divisa constituatur Ordinata Curvæ, Area huic Ordinatae competens converteretur in aliam sibi æqualem, omni Radicalitate liberam, quæ comparari poterit cum Sectionibus conicis; idem dicendum est de Ordinata $\frac{2^n-1}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$, idemque dicendum de Binomialibus Ordinatis quibullibet ex earum genere quæ superius tractatæ fuerunt, quæ si possint Radicalitate sua exui antequam dividantur, tum etiam post divisionem Radicalitate sua solventur, quo fiet ut earum Area facile ad sectiones Conicas referri possint.

Area Curvæ cujus Ordinata est $2^n-1 \times \frac{e+fz^n}{g+bz^n} \sqrt{}$ Radicalitate sua liberabitur plurimis quidem modis, sed præferim modo sequenti qui cæteris mihi videtur anteponendus; pone $\frac{e+fz^n}{g+bz^n} = v$, tunc Area Ordinatae datae competens, converteretur in aliam sibi æqualem cujus abscissæ v , Ordinata vero $\frac{\frac{1}{2} \times v^2 \times f g - b x e - g v^{2^n-1}}{b v - f v^{2^n-1}}$.

CAPUT IV.

De Multinomiis quibusdam in Binomia aut Trinomia resolvendis.

IN Tractatu *De Mensura Sortis*, cum forte incidissem in Aequationes quasdam sic constitutas, ut Coefficientes terminorum hinc inde ab extremis æqualiter distantium, singulae singulis, æquales inter se essent; facile comperi ejusmodi Aequationes ad alias adduci posse quarum dimensiones dimidio saltem pauciores futuræ essent quam dimensiones Aequationis propositæ.

Hæc vero observatio, quam haud scio an quisquam ante me utquam fecerit, poterit usui esse in resolvendis Multinomiis quibusdam in Binomia aut Trinomia: quod ut Exemplis ostendamus.

Proponatur Quinquinomium $z^4 + pz^3 + qzz + pz + 1$ in Trinomia resolvendum; finge Trinomia bina, $zx + az + 1$, $zx + bz + 1$, e quorum mutuo ductu Multinomium datum generetur, tum facta Multiplicatione, orietur Quinquinomium

$$z^4 + az^3 + abzx + az + 1$$

$$+ bz^3 + 2zx + bz$$

quod si compareris cum Quinquinomio dato, exurgent Aequationes binæ $a + b = p$, itemque $ab + 2 = q$, e quibus elicitur $a =$

$$\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + 2}, \text{ atque } b = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + 2}, \text{ quo fit ut Trinomia bina in quæ Quinquinomium datum resolvitur, jam data sint.}$$

At vero si ita accidat ut quantitas sub vinculo Radicis inclusa sit negativa, non ideo sequitur Multinomium datum non posse dividi in Trinomia; etenim nihil aliud inde concludi poterit, nisi quod Trinomia debuissent assumi sub alia forma, quæ ut inveniatur, illud observandum est: si Multinomium datum perinde tractetur ac si esset Aequatio nihilo equalis, tunc ratione Coefficientium equalium hinc inde ab extremis equaliter distantium, id necessario eveniet ut unaquæque Radicum habeat Radicem quandam alteram sibi reciprocam: ergo Trinomium utrumque, tanquam nihilo aequale conceptum, continet vel duas radices quarum altera sit alterius reciproca, vel duas alias quarum utraque habeat suam reciprocam in altero Trinomio; porro si prior casus evenierit, tunc Trinomia ad formam præcedentem rediguntur, sin vero posterior evenierit, assume Trinomium unum $zx + az + b = 0$, Trinomium igitur alterum oportebit assumi $\frac{1}{z} + \frac{a}{z} + b$, vel $zx + \frac{a}{z}z + \frac{1}{z} = 0$, jam si Binomia assumpta inter se multiplicentur, Multinomium genitum erit,

$$zx + az^3 + bzx + az + 1$$

$$+ \frac{a}{z}z^3 + \frac{aa}{z}zx + \frac{a}{z}z$$

$$+ \frac{1}{z}zx$$

tum comparatione facta cum Multinomio dato, exurgent Aequationes duæ $a + \frac{a}{z} = p$, $b + \frac{aa}{z} + \frac{1}{z} = q$, ex quarum utraque si a expungatur, orietur Aequatio

$$b^4 + 2b^3 - 2qbb + 2b + 1 = 0.$$

$$-qb^3 + pbb - qb + 2bb$$

quæ si fingatur genita esse ex his binis, $bb - fb + 1 = a$, $bb - gb + 1 = a$. Deinde fiat comparatio terminorum sibi mutuo respondentium, reperietur $f + g = q - 2$, $fg = pp - 2q$, adeoque erit $f = \frac{1}{2}q - 1 +$

$\sqrt{\frac{1}{4}qq - q - 1 - pp}$, itemque $g = \frac{1}{2}q - 1 - \sqrt{\frac{1}{4}qq - q - 1 - pp}$, quibus cognitis b & a innoscent.

Ex hac posteriore formula, si Multinomium datum sit $z^4 + 4z^3 + 8zz + 4z + 1$, Trinomia bina in quæ resolvitur erunt, $zz + 2 + \sqrt{2xz + 3} + 2\sqrt{2}$, & $zz + 2 - \sqrt{2xz + 3} - 2\sqrt{2}$.

Proponatur nunc Septinomium $z^6 + pz^5 + qz^4 + rz^3 + qzz + pz + 1$, in Trinomia resolvendum; sige Trinomia terna $zz + az + 1$, $zz + bz + 1$, $zz + cz + 1$, e quorum continuo ductu Multinomium datum generetur, tunc facta multiplicatione horum omnium, oriatur Septinomium

$$z^6 + axz^5 + abxz^4 + 2axz^3 + abxzz + axz + 1$$

$$+ b + ac + 2b + ac + b$$

$$+ bc + bc + 2c + bc + c$$

$$+ 3 + 3 + abc + 3 + abc + 3$$

quod si comparetur cum Septinomio dato, exurgent tres Equationes $a + b + c = p$, $ab + ac + bc = q - 3$, $abc = r - 2p$, adeoque ex natura Equationum statim colligitur esse $a^3 - 3aa + q - 3 \times a - r - 2p = 0$; quapropter si Radices istius Equationis sint omnes reales, una eademque opera, determinabuntur tres quantitates a , b , c ; sin vero, accidat ut earum una tantummodo sit possibilis, quam pone esse a , divide Multinomium datum per $zz + az + 1$, tunc quotiens ex hac divisione ortus hanc obtinebit formam, nimirum $x^4 + sz^3 + rz^2 + sz + 1$, adeoque ex iis quæ ante tradita fuerunt, quotiens ille in duo Trinomia resolvetur.

Si Multinomium datum sit $z^5 + pz^4 + qz^3 + rz^2 + sz + 1$, poterunt assumi Trinomia quaterna $zz + az + 1$, $zz + bz + 1$, $zz + cz + 1$, $zz + dz + 1$, e quorum continuo ductu Multinomium illud generari fingatur, tum ex debita comparatione obti-

obtinebitur Aequatio quatuor dimensionum involvens valores omnes quantitarum, a, b, c, d .

Sed id multo commodius comperietur, fingere Trinomium $zz+xz+1$, cujus indeterminata x ponatur complecti hos omnes valores; etenim ex Multinomio dato, & Trinomio, ad instar Aequationis nihilo aequalis utroque habito, si quantitas z expungatur, obtinebitur Aequatio $x^4 - px^3 + q - 4xx - r - 3px - s - 2q + 2 = 0$. cujus si omnes Radices sint possibiles, eadem opera determinabuntur quantitates omnes a, b, c, d .

At si earum duæ tantummodo sint possibiles, quas pone esse a & b ; divide Multinomium datum per id quod factum sit ex Trinomiis binis $zz+az+1$, $zz+bz+1$, tunc valores reliquarum c & d determinabuntur ope Quotientis.

Quod si ita acciderit ut quantitarum a, b, c, d nulla sit possibilis, finge Quinquinomia bina $x^4+ex^3+fxz+gz+b$, $z^4+\frac{e}{b}z^3+\frac{f}{b}zz+\frac{g}{b}z$ $+\frac{1}{b}z+\frac{1}{b}$, e quorum mutuo ductu Multinomium datum generari intelligatur, tum ex debita comparatione inter se terminorum Multinomi geniti & terminorum Multinomi dati, exurgent quatuor Aequationes e quibus si quantitates omnes assumptæ præter b expellantur, incidet in Aequationem octo dimensionum ita constitutam ut Coefficientes omnes aequaliter ab extremis distantes futurae sint inter se aequales, hæc vero ad quatuor dimensiones deprimi poterit, ponendo $bb+bu+1=0$; quod reliquum est conficietur Regula *Cartesii* qua dissolvuntur Aequationes quatuor dimensionum in duas Trinomiales.

Si detur Multinomium ex partibus numero paribus constatum atque ita affectum ut Coefficientes terminorum ab extremis aequaliter distantium sint inter se aequales, Multinomium illud ad Multinomium proxime inferius adducetur; etenim si Multinomium datum sit $z^7+pz^6+qz^5+rz^4+rz^3+qzz+pz+1$, quod finxeris nihilo aequale, tunc posita $z=-1$, reperies $-1+p-q+r-r+q-p+1$, quæ quantitates cum sese mutuo destruant, indicio est Multinomium datum dividi posse per $z+1$.

Si cui sit in animo hanc speculationem ulterius prosequi, ei adjumento sequentia fortasse erunt quæ in Tabellam contraximus; sine igitur Multinomia

$$z^1 + pz^1 + qz^1 + pz + 1$$

$$z^2 + pz^2 + qz^2 + rz^2 + qz^2 + pz + 1$$

$$z^3 + pz^3 + qz^3 + rz^3 + sz^3 + qz^2 + pz + 1$$

$$z^{10} + pz^{10} + qz^{10} + rz^{10} + sz^{10} + qz^3 + pz^2 + qz + 1$$

$$z^{12} + pz^{12} + qz^{12} + rz^{12} + sz^{12} + tz^{12} + vz^{12} + sz^{12} + rz^{12} + qz^2 + pz + 1$$

tunc si ponatur $zz + xz + 1 = 0$, erunt

$$xx - px + q - 2 = 0$$

$$x^2 - pxx + q - 3xx - r - 2p = 0$$

$$x^4 - px^4 + q - 4xxx - r - 3pxx + s - 2q + 2$$

$$x^5 - px^5 + q - 5xx^4 - r - 4pxxx + s - 3q + 5xx + t - 2r + 2p$$

$$x^6 - px^6 + q - 6xxx^4 - r - 5pxx^3 + s - 4q + 9xxx + t - 3r + 5pxx + v - 2s + 2q - 2,$$

lex autem continuationis istarum Aequationum facile in Canonem adduci potest ad hunc modum; sit igitur Multinomium datum

$$z^{2n} + pz^{2n-1} + qz^{2n-2} + rz^{2n-3} + \dots + yz^2 + \dots + rz^3 + qz^2 + qz + 1.$$

in quo y designet Coefficientem termini medi, sit praeterea $zz + xz + 1 = 0$, tunc erit

$$x^n - px^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + sxx^{n-4} + txx^{n-5} + vxx^{n-6} + yxx^{n-7} \text{ etc.} = 0.$$

$$-n - +n - 1 \times p - n - 2 \times q + n - 3 \times r - n - 4 \times s + n - 5 \times t$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times p + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-3}{2} \times q - \frac{n-3}{1} \times \frac{n-4}{2} \times r$$

$$+ \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} - \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} \times q + \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{2} \times r$$





LIBER IV.

CAPUT I.

De summis Serierum recurrentium.

PROBLEMA I.

Problema. *Alia Serie qualibet recurrente, a + bx + cxx + dx + ex + Ec. cujus relationis Scala sit f — g; invenire summam talis Seriei in infinitum continuatae.*

SOLUTIO.

Disponantur termini Seriei una cum Aequationibus adjunctis eodem ordine quo disponuntur numeri vulgares in unam summam colligendi, ut sequitur,

$$P = P$$

$$Q = Q$$

$$R = fQ - gPxx$$

$$S = fR - gQxx$$

$$T = fS - gRxx$$

$$Ec.$$

quo facto, si summa terminorum P, Q, R, S, T Ec. in infinitum, e quibus constatur prima Columna ponatur $= z$; tunc summæ sequentium Columnarum sic designabuntur: ex Hypothesi est $P + Q + R + S + T$ Ec. $= z$, erit igitur, $Q + R + S + T$ Ec. $= z - P$; ductantur omnia in fx , hinc habebitur $fQ + fR + fS + fT$ Ec. $= fxz - fP$; addantur utrobique $P + Q$, erit igitur summa 2^a Columnæ

13811

summae hoc est $P + Q + fQx + fRx + fSx + fTx$ &c. =
 $P + Q + fxx - fPx$; summa vero tertiae Columnae, statim percipi-
 tur designari oportere per $-gx + x$; his ita designatis, cum summa
 terminorum primae Columnae aequalis sit summae terminorum se-
 cundae & tertiae; perspicuum est fore $z = P + P + fxx - fPx - gx + x$,

$$\text{sive } z = \frac{P + Q - fPx}{1 - fx + gxx} = \frac{a + bx - fax}{1 - fx + gxx}.$$

PROBLEMA II.

Hoc posito, Scalam relationis, in Serie qualibet recurrente,
 $a + bx + cx + dx' + ex'$ &c. constanti ex tribus partibus
 $f - g + h$, invenire summam Seriei.

SOLUTIO.

Eadem Analyti qua usi sumus in superiore Problemate invenietur
 summa Seriei = $a + bx + cx +$

$$\frac{-fax - fbx + gax}{1 - fx + gxx - bx'}$$

atque eodem modo, si Scala relationis componatur ex quatuor par-
 tibus, $f - g + h - k$, erit summa Seriei $a + bx + cx + dx' + dx'$

$$\frac{-fax - fbx - fex + gax + gbx - bax}{1 - fx + gxx - bx' + kx'}$$

PROBLEMA III.

Data Serie qualibet recurrente, invenire summam terminorum
 quolibet quorum multitudo data sit.

L.

S O.

SOLUTIO.

Sit Series recurrens, $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4&c.$ cujus termini duo primi ponantur summi ad libitum: sit $f-g$ Scala relationis, l numerus terminorum quorum summa requiratur, $ax^1+\beta x^1+1$, termini duo proxime insequentes ultimum datorum; his positis, erit summa desiderata $a+bx-x^1xa+\beta x$.

$$\frac{-fax \quad -fax}{1-fx+gxx}$$

Eodem modo si termini tres primi sumantur ad libitum, sitque $f-g+b$ ea relationis Scala qua reliqui determinantur, l numerus terminorum datus, $ax^1+\beta x^1+1+\gamma x^1+2$ termini tres proxime insequentes ultimum datorum; tunc erit summa desiderata

$$\frac{a+bx+cx^2-x^1xa+\beta x+\gamma xx \quad -fax-\beta xx \quad -gaxx}{1-fx+gxx-bx^2}$$

Lex autem talium Theorematum in infinitum ex formatione praecedentium satis perspicitur, nec ulteriori explicatione indiget; porro ex data relationis Scala, Series poterit continuari donec obtineantur Coefficientes a, β, γ ; adeoque summa terminorum quorum numerus datus sit semper invenietur.

Attamen si ita evenierit ut numerus terminorum datus, sit permaguus; continuatio Seriei nimis molesta evadet; quo in casu operæ pretium erit uti ea methodo quam exposuimus in Theoremate 3^o Libri secundi, quæ tunc usui potissimum erit, cum Radices ejus Aequationis quæ efficitur ex Scala relationis, erunt omnes reales & inæquales; etenim solo subsidio maximæ Radicis, plerumque invenietur approximatio sufficiens ad terminum desideratum, cujus rei Exemplum in Problemate sequente afferemus, quod tamen priusquam aggrediamur non alienum erit hoc loco subicere Corollarium ex superius dictis facile deducendum.

COROLLARIUM.

Si dividatur Unias per Multinothium rationale, tum Seriei ex hac divisione exurgens sumantur termini omnes alterni, vel termini

omnes, binis, ternis, quaternis, aut pluribus intervallis a se invicem distantibus, novæ Series ex his terminis constatæ accurate summari poterunt.

EXEMPLUM I.

Sit $1+x+2xx+3x^2+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+34x^8$ &c. Series nata ex divisione Unitatis per Trinomium $1-x-xx$, sumantur termini omnes alterni, initio facto a primo; sumantur itidem termini omnes alterni, initio facto a secundo, ex quibus conficiantur Series binæ

$$1+2xx+5x^4+13x^6+34x^8 \text{ &c.}$$

$$x+3x^2+8x^5+21x^6+55x^8 \text{ &c.}$$

Fingatur Denominator $1-x-xx=0$; jam vero cum indices potestatum indeterminatæ x se invicem superent communi differentia 2, pone $xx=z$; tunc si ope binarum æquationum $1-x-xx=0$, $xx=z$, expellatur quantitas x , orietur Æquatio nova $1-3z+zz=0$, sive x restituta, $1-3xx+x^2=0$, jam si dividatur hæc æquatio per priorem $1-x-xx=0$, orietur quotiens $1+x-xx$, cujus si sumantur termini omnes alterni propter terminos Series datæ alternam sumptos, ex his conficietur summæ binæ $1-xx$ & x , quæ si constituentur Numeratores fractionum binarum quarum communis

Denominator sit $1-3xx+x^2$ fractiones $\frac{1-xx}{1-3xx+x^2}$, $\frac{x}{1-3xx+x^2}$,

sic genitæ, atque ordinatim sumptæ, erunt summæ novarum Serierum.

EXEMPLUM II.

Si vero desiderentur summæ terminorum ternis intervallis inter se distantium, pone ut prius $1-x-xx=0$, jam vero cum indices potestatum in novis Seriebus se invicem superent communi differentia 3, pone iterum $xx=z$; quo facto, orietur nova Æquatio $1-4z-zz$ sive $1-4x^2-x^3=0$, quæ si dividatur per $1-x-xx$, quotiens erit $1+x+2xx-x^2+x^3$, termini ad terna interval-la ordinatim sumpti conficient tres summæ $1-x^3$, $x+x^4$, $2xx$ quæ si constituentur Numeratores trium fractionum quarum Denominator communis sit $1-4x^2-x^3$, fractiones illæ ordinatim sumptæ erunt tres summæ novarum Serierum quarum termini singuli ordinatim sumpti, ternis intervallis inter se distent, & eodem modo pergere licet ad intervalla quaterna aut altiora, tum etiam ad Multinomia quælibet.

PROBLEMA IV.

A & B quorum Dexteriorates sunt in ratione data a ad b, ea conditione ludent, ut quoties A ludum unum vicerit, B ipsi tradat nummum unum; quoties vero B vicerit, A tridem ipsi tradat nummum unum: & non prius ludo desistant quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit. Queritur quam probabilabile futurum sit ut Certamen neque intra datum ludorum numerum x, neque expirante illo numero concludatur.

CASUS I.

Ponamus 1^o rationem a ad b esse aequalitatis, eumque numerorum numerum quem uterque Collusorum habeat esse parem, n. g. 10.

SOLUTIO.

Exponentur Probabilitates Certaminis non finiendi intra ludos 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 &c. per quantitates P, Q, R, S, T, V, X, Y, Z &c.

Pater fore $P=1$, $Q=1$, $R=1$, $S=1$, $T=1$; etenim certum est ludendi finem non eventuram ante pauciores ludos quam decem.

Jam terminus quisque post quinque primos ad quinque antecedentes refertur per constantem relationis scalam quae hoc in casu erit

$$\frac{10}{4} - \frac{3^4}{16} + \frac{5^0}{64} - \frac{2^5}{256} + \frac{2}{1024}, \text{cujus relationis Scala, lex generalis}$$

haec est; nimirum posito n numero numerorum quos uterque Collusorum habet, postea etiam $r = \frac{1}{4}$, qualiscunque futurus sit numerus n; erit terminus quisque relatus ad tot antecedentes quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$, si fuerit n numerus par, vel in $\frac{n-1}{2}$, si fuerit impar, ad hunc modum

$$V = nrT - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r r S + \frac{n}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-5}{3} r^2 R$$

$$- \frac{n}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-6}{3} \times \frac{n-7}{4} r^4 Q \text{ &c. } *$$

Qua-

* Vide Librum anglie scriptum de Sorte, qui inscribitur, *The Doctrine of Chances*.

Quapropter, si ex data relationis Scala conficiatur Aequatio
 $x^1 - \frac{10}{4}x^1 + \frac{35}{16}x^1 - \frac{50}{64}xx - \frac{25}{256}x - \frac{2}{1024} = 0$, cujus Radices sint m ,
 p, q, s, t : resolvetur Series terminorum $P + Q + R + S + T + Y + Z$,
 in quinque Progressiones geometricas,

$$A + Am + Am^2 + Am^3 + Am^4 \text{ \&c.}$$

$$B + Bp + Bp^2 + Bp^3 + Bp^4 \text{ \&c.}$$

$$C + Cq + Cq^2 + Cq^3 + Cq^4 \text{ \&c.}$$

$$D + Ds + Ds^2 + Ds^3 + Ds^4 \text{ \&c.}$$

$$E + Et + Et^2 + Et^3 + Et^4 \text{ \&c.}$$

Sed ex Theoremate quarto Libri primi, invenietur

$$A = T - p \times S + p q \times R - p q s \times Q + p q s t \times P$$

$$- q + p s - p q t$$

$$- s + p t - p s t$$

$$- t + q s - q s t$$

$$+ q t$$

$$+ s t$$

$$\frac{m - p \times m - q \times m - s \times m - t}{m - p \times m - q \times m - s \times m - t}$$

Sive propter $T = S = R = Q = P = 1$, invenietur

$$A = 1 - p \times 1 - q \times 1 - s \times 1 - t, \quad B = 1 - q \times 1 - s \times 1 - t \times 1 - m,$$

$$m - p \times m - q \times m - s \times m - t, \quad p - q \times p - s \times p - t \times p - m,$$

$$C = 1 - s \times 1 - t \times 1 - m \times 1 - p, \quad D = 1 - t \times 1 - m \times 1 - p \times 1 - q,$$

$$q - s \times q - t \times q - m \times q - p, \quad s - t \times s - m \times s - p \times s - q,$$

$$E = 1 - m \times 1 - p \times 1 - q \times 1 - s$$

$$t - m \times t - p \times t - q \times t - s$$

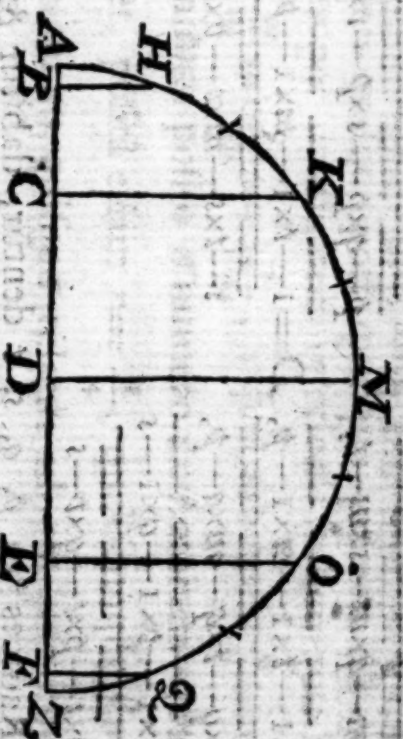
Quapropter si Radices m, p, q, s, t dentur, dabitur & Probabilitas
 Certaminis non finiendi intra datum quemlibet ludorum numerum
 x , quae utique erit $Am^x + Bp^x + Cq^x + Ds^x + Et^x$. Sed divisae in
 partes aequales decem, sive circumscriptionem circuli cujus diameter MZ
 sit Unitas; si a Primo, tertio, quinto, septimo, nono, divisiōis ter-
 mino demittantur ad dimetrum perpendicularia $HB, KC, MD, OE,$
 QF , erunt sinus recti ZB, ZC, ZD, ZE, ZF aequales Radicibus $m,$
 $p,$

p, q, s, t , quod constar ex Aequationibus ad circulum vulgo notis, prout Radices illae dabuntur.

Huc usque processeram in Libro anglice scripto *de Sorte*, sed paulo post editum librum, Solutionem hanc ulterius perduxeram, nimium inventionem methodi qua producta $1 - px1 - qx1 - sx1 - t$, & $m - pxm - qxm - sxm - t$, facilius determinari possent quam per vulgarem multiplicationem; divisâ utique semicircumferentiâ ut praescriptum fuit, inveneram esse $1 - px1 - qx1 - sx1 - t = \frac{1}{2^3 \times AB}$, &

generaliter $\frac{1}{2^{n-1} \times AB}$; productum vero $m - pxm - qxm - sxm - t$ inveneram esse $= \frac{10}{2^{10} \times BH}$, & generaliter $\frac{n}{2^n \times BH}$: est igitur $A = \frac{2BH}{n \times AB}$,

& propter eandem rationem, $B = \frac{2CK}{n \times AC}$, & sic deinceps. Quamobrem erit Probabilitas Certaminis non finendi intra datum ludorum numerum $x = \frac{2BH}{n \times AB} \times m^{\frac{1}{2}} - \frac{2CK}{n \times AC} \times p^{\frac{1}{2}} + \frac{2DM}{n \times AD} \times q^{\frac{1}{2}} - \frac{2EO}{n \times AE} \times s^{\frac{1}{2}} + \frac{2QF}{n \times AF} \times t^{\frac{1}{2}}$. Jam vero si haec formula transferatur ad circulum cujus Radius sit Unitas, Solutio sic poterit enunciari.



Centro D , intervallo $DA = 1$, describatur semicircumferentia AMZ quæ dividatur in tot partes aequales, quot sunt Unitates in n : tum ex primo H , tertio K , quinto M , septimo O , & impari quæque divisionis termino, demittantur ad Diametrum AZ perpendicula HB, KC, MD, OE, QF ; ponatur $Q = \frac{HB^{\frac{n-1}{2}}}{AB^{\frac{1}{2} \times n - 1}} - \frac{CK^{\frac{n-1}{2}}}{AC^{\frac{1}{2} \times n - 1}}$

$$+ \frac{DM^{x+1}}{AD^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{EO^{x+1}}{AE^{\frac{1}{2}x+1}} \text{ \&c. tunc erit ultimus Seriei propositæ ter-}$$

minus, hoc est terminus ille cujus locus designatur per $\frac{1}{2}x$, æqualis quantitati $\frac{2}{2^{\frac{1}{2}x-1}n}$, quæ proinde designabit probabilitatem Certami-

nis non finiendi intra eum ludorum numerum quem x indicat; erit igitur probabilitas Certaminis finiendi intra datum ludorum numerum x , ad probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{1}{2}x-1}n - 2$ ad 2 .

Si sinus rectus dimidii Arcus AH nominetur s , commode substituetur $2s$ in locum sinus versi AB ; quod etiam valet in reliquis.

COROLLARIUM.

Si sumatur pro 2 terminus primus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$, neglectis cæteris, modo

fit x numerus magnus respectu numeri n , obtinebitur approximatio sufficiens ad terminum desideratum; Exempli gratia, si sit $n=10$, & $x=76$, tum sumatur pro 2 terminus primus neglecti cæteris, invenietur Probabilitas Certaminis finiendi intra ludos non plures quam 76, ad Probabilitatem non finiendi, ut 50747 ad 49253; si vero sumantur pro 2 termini bini primi, neglectis cæteris, invenietur ratio Probabilitatum ut 50743 ad 49247.

CASUS II.

Ponamus iterum rationem a ad b esse æqualitatis, sed nummorum numerum quos uterque Collusorum habeat esse imparem.

SOLUTIO.

Analysis in casu impari videtur aliquantulum differre a prior, sed cum utraque conclusio ad eandem redigi possit, nullam hic aliam censui apponendam solutionem quam ea quæ cum primo casu congruit. Quamobrem



Centro G , intervallo $GA=1$, describatur semicircumferentiæ AMZ quæ dividatur in tot partes æquales quot sunt Unitates in numero n ; tum ex primo H , tercio K , quinto M , septimo O , & impari quoque divisionis termino, demittantur ad Diametrum perpendicularia HB ,

COROLLARIUM

Si sumatur pro 2 terminus primus, neglectis ceteris, obtinebitur approximatio sufficiens ad terminum desideratum; Exempli gratia, si sit $n=45$, & datus ludorum numerus $k=1519$, invenietur ratio Probabilitatis certaminis finiendi intra ludos non plures quam 1519, ad Probabilitatem non finiendi ut 49559 ad 50441; at vero, si adhibeantur pro 2 termini duo primi, neglectis ceteris, invenietur ratio harum Probabilitatum ut 49569 ad 50431; quæ ratio est vero proximissima.

COROLLARIUM II.

Hinc facile est invenire quorenis ludis, Probabilitates certaminis
finiendi, & non finiendi evadent proxime aequales; etenim si pro 2

HB^{x+1}
 $AB^{i_{x+1}}$ ponatur que $2^{i_{x+1}}$ $n-2=2$, five

个

$Q=2^{\frac{1}{2}n}$; invenietur $x=0.756m$ proxime, siue fuerit n numerus par, siue impar; quod sequente Analyfi plane constabit.

Ex superiori Aequatione deducitur hæc Aequatio logarithmica, nimirum $x+1 \log. HB = \frac{1}{2}x+1 \log. AB = \frac{1}{2}x-2 \log. 2 + \log. n$, unde $x = \frac{2 \log. HB + 2 \log. AB + 4 \log. 2 - 2 \log. n}{\log. 2 + \log. AB - 2 \log. HB}$; pone n esse maximum numerum, siue, quod eodem recidit, pone arcum AH esse valde exiguum; sit arcus ille $= z$, erit igitur sinus rectus $HB = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{12}zz$ proxime, & Sinus versus $AB = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{12}zz$ proxime; sed logarithmus quantitatis $1 - \frac{1}{12}zz = -\frac{1}{12}zz$ proxime, & logarithmus quantitatis $1 - \frac{1}{12}zz = -\frac{1}{12}zz$ proxime, quapropter erit

$$x = \frac{24 \log. 2 - 8 \log. 2 - \frac{2}{3}zz - 8 \log. n}{zz}.$$

Sit a Semicircumferentia circuli ad radium 1; erit igitur $z = \frac{a}{n}$, & $\log. z = \log. a - \log. n$, quamobrem substitutis his valoribus in locum z & $\log. z$, obtinebitur $x = \frac{24m \log. 2 - 8m \log. a}{aa} - \frac{2}{3}$, si-
ve, neglecta fractione $\frac{2}{3}$, $x = \frac{24m \log. 2 - 8m \log. a}{aa}$, sed

$\frac{24 \log. 2 - 8 \log. a}{aa} = 0.756$ proxime, adeoque $x = 0.756m$ proxime.

Clarissimus *Memort*, in secunda Editione libri sui inscripti, *Analyse des jeux de hazard*, scribit se invenisse, si n denotaverit numerum nummorum imparem, ponaturque $\frac{n+1}{2} = p$, quantitatem $3pp-3p+1$ semper denotaturam eum ludorum numerum intra quem quisvis possit potiori conditione contendere certamen finitum iri. Interim fateatur se non potuisse talem formulam invenire pro Ludorum numero pari.

Circa quod, hæc observari possunt, primum formulam $3pp-3p+1$ ad $\frac{3}{4}m + \frac{1}{4}$ adduci posse, siue simpliciter ad $\frac{3}{4}m$, cum fractio $\frac{1}{4}$, præquantitate $\frac{3}{4}m$, quodam modo evanescat: deinde expressionem

M
adhi-

adhibitam a Clarissimo Viro, non multum quidem a vero aberrare, si fuerit n numerus parvus, attamen in magnis numeris errorem ex hac formula oriundum futurum esse alicujus momenti; præterea Viri Cl. Regulam æque bonam esse in ludorum numero pari, ac in impari; postremo, quantitatem $3pp - 3p + 1$, seu $\frac{3}{4}nn + \frac{1}{4}$, neque in pari neque in impari casu *semper* indicaturam cum Ludorum numerum intra quem quis contendere queat, idque *potiori* conditione certamen finitum iri; etenim si fuerit is numerorum numerus quem uterque Collisorum habeat 45, quod est Exemplum a D^o *Mommet* allatum, erit $3pp - 3p + 1 = 1519$, attamen Probabilitas Certaminis finiendi intra hunc ludorum numerum minor erit Probabilitate non finiendi, in ea ratione quam habet 49569 ad 50431 proxime.

CASUS III.

Positis cæteris ut in primo vel secundo casu; sit a ad b ratio intrinsece qualitatatis.

SOLUTIO.

$$\text{Pone } \frac{a^n + b^n}{a + b^n} = L, \frac{a - b^n}{a + b^n} = d, \frac{ab}{a + b^n} = r. \text{ esto } 1, 2r :: \frac{HB}{AB},$$

$$m :: \frac{CK}{AC}, p :: \frac{MD}{AD}, q :: \frac{OE}{AE}, s :: \frac{QF}{AF}, t.$$

$$\text{Pone etiam } \mathcal{Q} = \frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x} - \frac{CK}{2rAC + d} p^{\frac{1}{2}x} + \frac{MD}{2rAD + d} q^{\frac{1}{2}x}$$

Et c. quo facto, erit Probabilitas certaminis finiendi intra Ludos non plures quam x , ad Probabilitatem non finiendi, ut $n r^{\frac{1}{2}x-1} - 2L\mathcal{Q}$, ad $2L\mathcal{Q}$.

COROLLARIUM I.

Si sumatur pro $\mathcal{Q}$ terminus primus $\frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio sufficiens, modo fuerit x satis magnus; respectu n .

COROL-

COROLLARIUM II.

Posito $\mathcal{Q} = \frac{HB}{2rAB+d} m^{\frac{1}{2}}$, tunc ex Equatione $4L\mathcal{Q} = nr^{\frac{1}{2}}$, facile invenietur per primos Serierum infinitarum terminos valor quantitas x , quo proxime determinatur is ludorum numerus qui requiritur ad constituendam aequalem Probabilitatem Certaminis sustinendi & non finiendi.

COROLLARIUM III.

Et eodem modo id determinabitur, quoteni ludi requirantur ad constituendas eas Probabilitates Certaminis finiendi, & non finiendi quæ sint in ratione data.

COROLLARIUM IV.

Si Collutorum numerus, incipiente Certamine, sint inæquales, Solutiones præcedentium similes sed aliquanto complicatiores exhiberi poterunt.

CAPUT II.

De invenendis Seriei Terminis.

PROBLEMA I.

Invenire Terminum assignatum Seriei cujuscunque Trinomialis.

SOLUTIO.

Seriem eam Trinomialem appello, ex cujus relationis Scala conficitur Æquatio trinomialis; sic Series recurrens $a+bx+cx^2+dx^3+\dots$ &c. cujus relationis scala ponitur esse $f+g$, cujus proinde Æquatio ex relationis scala confecta, nimirum $xx-fx+g=0$, erit trinomialis: jam si id requiratur ut hujus Seriei Terminus quilibet, cujus locus datus sit, assignetur; pene m & p esse Radices Æquationis $xx-fx+g=0$, atque $l+1$ designare locum termini desiderati, sive esse l intervallum inter primum Seriei terminum & terminum illum

M 2

cujus

cujus locus assignatur: pone $A = \frac{b+m-fx^a}{m-p}$, $B = \frac{b+p-fx^a}{p-m}$, tunc erit Coefficiens termini desiderati $Am^l + Bp^l$, adeoque erit terminus ipse $\overline{Am^l + Bp^l \times x^l}$ facile ad numeros accommodandus si ita acciderit ut m & p sint Radices possibiles.

Sin vero, sint m & p Radices impossibiles, converte $m-p$ in $2m-f$ ipsi æqualem, itemque $p-m$ in $2p-f$, ut habeatur $A = \frac{b+m-fx^a}{2m-f}$,

& $B = \frac{b+p-fx^a}{2p-f}$, quibus ad eundem denominatorem adductis, invenietur

$$Am^l = \frac{2apm - 2afp - 2bp - afm + aff - bf}{4mp - 2mf - 2pf + ff} \times m^l$$

$$Bp^l = \frac{2amp - 2afm + 2bm - afp + aff - bf}{4mp - 2pf - 2mf + ff} \times p^l$$

Summantur sigillatim termini omnes respondententes amborum Numeratorum, addanturque ii ad se invicem; quo facto, adducantur perpetuo summae ad coefficients Scalae.

Sic, termini duo primi conficiunt summam $2apmx^{m^l-1} + 2ampxp^l$; sed ex natura Aequationis $xx - fx + g = 0$, cujus Radices ponuntur esse m & p , est $mp = g$, adeoque summa horum terminorum redigitur ad $2agxm^{l-1} + p^l$.

Termini duo sequentes ad se invicem additi, conficiunt summam $-2afp \times m^{l-1} - 2afm \times p^l$: pro $2afp \times m^{l-1}$ scribe $-2afpm \times m^{l-1}$, atque iterum pro $2afm \times p^l$ scribe $2afmp \times p^{l-1}$; sed $pm = g$, erit igitur summa secunda $-2afgxm^{l-1} + p^{l-1}$.

Summa tertia eodem operandi modo invenietur esse $2bgxm^{l-1} + p^{l-2}$

Summa quarta erit $-afxm^{l-1} + p^{l-1}$

Summa quinta erit $affxm^{l-1} + p^l$

Summa sexta erit $-bfxm^{l-1} + p^l$

Denominator propter $mp = g$, & $m + p = f$, adducetur ad $4g - ff$.

Erit itaque summa $Am^l + Bp^l =$

$$\frac{-2afg + 2bgxm^{l-1} + p^{l-1} + 2ag + aff - bfxm^{l-1} + p^l - afxm^{l-1} + p^{l-1}}{4g - ff}$$

Sed

Sed $m^{l+1} + p^{l+1} = f \times m^{l-1} + p^{l-1} \times g \times m^{l-1} + p^{l-1}$.

Quapropter, si ad communem Radium 1, sumantur tres Arcus quorum secundus sit primi multiplex in ea ratione quam habet $l-1$

ad 1, tertius vero ejusdem multiplex in ea ratione quam habet l

ad 1; sitque præterea $\frac{f}{2\sqrt{g}}$ Cofinus primi, $\frac{D}{2\sqrt{g}l-1}$ Cofinus secundi,

$\frac{E}{2\sqrt{g}^l}$ Cofinus terti, tunc erit $m^{l-1} + p^{l-1} = D$, atque $m^{l-1} + p^{l-1} = E$,

adeoque erit $Am^{l-1} + Bp^{l-1} = \frac{2bg - afg \times D + 2ag - bf \times E}{4g - ff}$, ubi illud obser-

vari potest quod si ponatur s aequalis Sinui recto Arcus ejus cujus $\frac{f}{2\sqrt{g}}$ est Cofinus, tunc poterit Denominator $4g - ff$ converti in $4gs$.

PROBLEMA II.

Invenire Terminum quolibet cujus locus assignetur in Serie emergente ex divisione Unitatis per potestatem $1 - fx^s$, posito s numero integro.

SOLUTIO.

Sit l intervallum inter Terminum primum, & Terminum illum cujus locus assignatur; quo posito erit Terminus requisitus =

$\frac{l+s-1}{1} \times \frac{l+s-2}{2} \times \frac{l+s-3}{3} \times \frac{l+s-4}{4} \dots \dots \dots \times f^l z^l$ ad tot factores ante ultimum $f^l z^l$ continuandus, quot sunt unitatis in $s-1$.

COROLLARIUM

Cum series Numeratorum constituat progressionem arithmeticam decrecentem, cujus primus terminus est $l+s-1$, differentia 1, numerus terminorum $s-1$, erit Numerator factoris ultimi = $l-1$, quapropter si invertatur series Numeratorum, poterit terminus requisitus

exprimi per $\frac{l-1}{1} \times \frac{l-2}{2} \times \frac{l-3}{3} \times \frac{l-4}{4} \times \frac{l-5}{5} \times \frac{l-6}{6} \dots \dots \dots f^l z^l$

ad tot factores ante ultimum continuandus quot sunt Unitates in $s-1$.

PRO-

PROBLEMA III.

Invenire Terminum quolibet cuius locus assignetur in Serie nata ex divisione Unitatis per potestatem integram $\frac{1-fx-gxx}{1-fx-gxx}$.

SOLUTIO.

Sit l intervalum Terminum primo & Terminum quæsito interjacent, tunc erit Terminus quæsitus =

$$\frac{l+s-1}{1} \times \frac{l+s-2}{2} \times \frac{l+s-3}{3} \times \frac{l+s-4}{4} \dots \dots \dots f^{l-1} \text{ ad tot facto-}$$

res ante ultimum f^{l-1} continuandus, quot sunt Unitates in $s-1$, $\frac{s}{1} \times \frac{l+s-2}{1} \times \frac{l+s-3}{2} \times \frac{l+s-4}{3} \times \frac{l+s-5}{4} \dots \dots \dots f^{l-2} g^{2l}$ ad

tot factores post primum s , & ante ultimam $f^{l-2} g^{2l}$ continuandus quot sunt Unitates in s ,

$$\frac{s}{1} \times \frac{s+1}{2} \times \frac{l+s-3}{1} \times \frac{l+s-4}{2} \times \frac{l+s-5}{3} \times \frac{l+s-6}{4} \dots \dots \dots f^{l-4} g^{2l}$$

ad tot factores continuandus post primum $\frac{sx+1}{2}$, & ante ultimam

$$f^{l-4} g^{2l} \text{ quot sunt Unitates in } s+1. \text{ Et}$$

PROBLEMA IV.

Invenire Terminum quolibet cuius locus assignetur in Serie nata ex divisione Unitatis per Multinomium quodcumque.

SOLUTIO.

Quaquam satis pateat ex iis quæ ante diximus non necesse futurum ad inventionem Terminum, ut ultra Trinomium ascendatur, modo multinomium datum possit resolvi in Binomia & Trinomia; atamen cum talis resolutio possit in plerisque casibus videri perdifficilis ne dicam impossibilis, cumque multi forsasse id exoptaverint ut Terminus possit accurate exhiberi, ut ut laboriosa operatione obtinendus; rem non ingratam facturum me existimaui, si ostenderem qua ratione id confici queat, quem ob finem, Theorema generale a me Regiæ Societati 6^o Junii 1697. exhibitum, & actis Philosophicis Num. 230. insertum, huc transferendum censui.

THE-

THEOREMA.

Si Multinomium $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$ &c. ad potestatem quamlibet datam n sit attollendum, erit potestas requisita.

$$a^n + na^{n-1}bz + \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bbz^2 + \frac{n}{6} \times \frac{n-1}{3} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3z^3$$

$$+ \frac{n}{24} a^{n-4}c^2 + \frac{n}{12} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bc$$

$$+ na^{n-1}d$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4z^4 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^3z^5$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^2c^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^2c$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bcd + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{4} a^{n-3}bbd$$

$$+ \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}cc + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{4} a^{n-3}bce$$

$$+ na^{n-1}e + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}be$$

$$+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}cd$$

$$+ na^{n-1}f$$

§c.

Lex autem quam observat natura in formatione hujus potestatis duplex est, altera quæ producta literalia, altera quæ Coefficientes seu Uncias respicit.

De productis literalibus, id præsertim est observatu dignum exponentes in singulis productis eadem potestati indeterminata x annexendis, eandem semper conficere summam, quæ quidem summa semper æqualis est alteri cuidam summae quæ colligitur ex additione indicis generalis n , & indicis ejus potestatis indeterminatae x cui producta hæc literalia annectuntur.

Per Exponentes literarum intelligo numeros designantes sedes illas quas in Serie naturali Literarum, singulae literæ occupant, sic exponens Literæ a est 1; Literæ b , 2; Literæ c , 3; &c sic deinceps, quo fit ut Exponens cujuscunque potestatis Literæ a qualis a' sit p , Exponens cujuscunque potestatis Literæ b qualis b' sit $2q$, Exponens cujuscunque potestatis Literæ c qualis c' sit $3r$.

Jam cum potestas quælibet indeterminata x , ad intervallum quodlibet datum / a primo Serici termino posita sit x' , inde sequitur producta omnia literalia potestati x' annectenda, adeoque ad intervallum

vallum / ponenda, obtineri posse, si ita combinentur literæ ingredientes Multinomium datum, ut summa Exponentium in productis singulis semper evadat $n-1$, numerus vero Literarum sit n .

Quod coefficientes atinet, a nobis demonstratum fuit in *Aëtis Philosophicis* supra memoratis, nihil aliud iis designari quam numerus permutationum quas literæ productum constituentes subire possunt; Exempli gratia, si sumatur productum $a^1b^1c^1$, Coefficientis ei præfigenda erit 60, ob id solummodo quod possint Literæ $aaabbc$ ita variare sua loca ut numerus variationum seu permutationum quas subeant sit 60.

Regulam autem generalem tunc dedimus qua posset obtineri coefficientis cuilibet producto competens, exempli gratia producto $a^n - pb^m d^s$, hanc nimirum: scribantur tot factores *Seriei* $n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3 \times n - 4 \times n - 5$ &c. quot sunt Unitates in summa Indicium q, r, s &c. hoc est in summa omnium, primo excepto; dividaturque productum ex his factoribus ortum, per productum aliud ortum ex continua multiplicatione serierum $1 \times 2 \times 3 \times 4$ &c. $1 \times 2 \times 3 \times 4$ &c. $1 \times 2 \times 3 \times 4$ &c. quarum prima contineat tot terminos quot sunt Unitates in q , secunda quot sunt Unitates in r , tertia quot sunt Unitates in s , & sic deinceps.

Demonstrabatur autem hæc Regula partim ex doctrina Combinationum, partim ex ratione inde desumpta quod summa Indicium $q-1+r-1+s$ &c. semper equalis sit excessui quo Index generalis n , superat Indicem $n-p$ literæ a , hoc est quod sit $p=q-1+r-1+s$ &c. seu quod numerus Literarum unicuique producto competens semper equalis sit numero n ; litera qualibet bis vel ter repetita, seu ad potestatem secundam vel tertiam evecta, pro duabus vel tribus literis semper habita: & sic de cæteris.

Definita igitur fuerant producta omnia literalia, æque ad Coefficientes ipsis præfigendæ, termino cuilibet assignato adscribenda, subque eadem potestate indeterminatæ x ordinanda, idque absque ulla consideratione relationis quam terminus ille haberet ad terminos anteriores.

Non desuere viri clarissimi qui existimarint legem hanc Multinonii satis facile ex Binomio *Newtoniano* deduci posse, ponendo scilicet $bx+cx^2+dx^3$ &c. $=v$, tum attollendo $a-1+v$ ad potestatem datam, deinde scribendo pro v, v^2, v^3, v^4 , cæterisque potestatibus quantitatibus v , eorum valores; illud quidem fateor, potestatem datam ad terminum quemlibet cujus locus assignatur hac methodo perductum iri, sed, si res consideretur, vicissim fatendum erit, legem termini hac

methodo comparati, non inde perfectam fore: terminus ille loculis quidem subijcitur, at vero natura ejus etiamnum erit ignota.

Iis vero quæ hæcenus de Multinomio ad potestatem datam erecto, diximus, accesserat Regula qua producta literalia ex precedentibus facile colligi poterant, hæc nimirum; multiplicentur per $\frac{b}{a}$ producta omnia literalia termino proxime antecedenti adscripta; 2^o multiplicentur per $\frac{c}{a}$ producta omnia literalia huic antecedenti anteriora, iis exceptis in quibus reperitur quantitas b ; 3^o multiplicentur per $\frac{d}{a}$ producta omnia literalia huic deinceps anteriora, iis exceptis in quibus reperiuntur b vel c , & sic continue, tunc membra omnia, quæ ex præscriptis multiplicationibus generantur, consicient producta literalia termini desiderati.

COROLLARIUM I.

Si ponatur $n = -1$, & $a = 1$, tunc erit quotiens oriundus ex divisione Unitatis per Multinomium $1 - bz - czx - dx^2$ &c. =

$$1 + bz + b^2z^2 + b^3z^3 + b^4z^4 + b^5z^5 + b^6z^6 + b^7z^7 + b^8z^8$$

$$+ 2bc + 3bbc + 4b^2c + 5b^3c + 6b^4c + 7b^5c$$

$$+ c^2 + 3bcc + 6bbcc + 10b^2cc + 15b^3cc$$

$$+ c^3 + 4bc^2 + 10bbc^2$$

$$+ d + 2bd + 3bdd + 4b^2d + 5b^3d + 6b^4d$$

$$+ 2cd + 6bcd + 12bbcd + 20b^2cd$$

$$+ 3ccd + 12bccd$$

$$+ dd + 3bdd + 6bbdd$$

$$+ 3acd$$

$$+ 5b^4c$$

$$+ 12bbcc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

$$+ 3ccc$$

Regula autem Coefficientium sic poterit enunciari.
Scribantur tot factores Series $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ &c. quot sunt Unitates in eo producto cui Coefficientis est præfigenda, dividaturque factum
N
per

per similes Series $1 \times 2 \times 3 \times 4$ &c. $1 \times 2 \times 3$ &c. 1×2 &c. quarum prima contineat tot factores quot sunt Unitates in indice literæ b ; secunda tot contineat quot sunt Unitates in indice literæ c ; tertia tot contineat quot sunt Unitates in indice literæ d , & sic deinceps quo usque exhauriantur literæ omnes.

COROLLARIUM II.

Si Exponentes literarum omnes Unitate minuantur, ita ut exponentes literæ b evadat 1; literæ c , 2; literæ d , 3; & sic deinceps, tunc erit summa Exponentium in productis singulis sub eadem potestate 2^1 ordinandis, æqualis indici / hujus potestatis.

COROLLARIUM III.

Quapropter si in Quotiente oriundo ex Divisione Unitatis per Multinomium quodlibet exempli gratia, *Quadrinomium* $1 - bz - cz - dz^2$, requirantur producta omnia literalia sub eadem potestate 2^1 ordinanda, ea obtineri poterunt ope Methodi quæ solvuntur quæstiones de Numeris integris; etenim inventis tribus numeris x , y , z , quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2, tertius per 3; producti numeri omnes, si ve sigillatim sumpti, si ve bini, si ve terni, semper conficiant suamam l , & convertantur valores integri quantitarum x , y , z , in respectivos indices quantitarum b , c , d , & pro summis quantitarum x , $2y$, $3z$, quoquo modo sumptis scribantur producta quantitarum respondentium cum indicibus suis propriis, producta hæc omnia simul sumpta ea ipsa erunt quæ requirebantur: & eodem modo procedere licet ad quinquinomium, si adhibeatur nova litera v per numerum 4 multiplicanda, & sic deinceps in infinitum.

DEFINITIONES.

Seriem eam nomino Binomialem, vel simpliciter Binomium quæ oritur ex divisione Unitatis per Binomium; eodem modo, Seriem eam nomino Trinomialem, vel simpliciter Trinomium quæ oritur ex divisione Unitatis per Trinomium, & sic de cæteris.

Seriem eam nomino Trinomiæ æmulam quæ conficitur ex binarum Serierum $1 + bz + b^2z^2 + b^3z^3$ &c. & $1 + cz + c^2z^2 + c^3z^3$ &c. mutuo ducta: eodem modo Seriem eam voco *Quadrinomiæ æmulam* quæ conficitur ex ternarum Serierum $1 + bz + b^2z^2 + b^3z^3$ &c.

ANALYTICAE CLIB. IV.

91

$1+cz^2+ccz^4+c^3z^6$ &c. $1+dz^3+ddz^6+d^3z^9$ &c. continuo ductu: ratio denominationis hinc desumitur quod producta litterata Series trinomialis, sunt termini ipsi ejus Series quam voco Trinomiali amulam, & sic de reliquis.

COROLLARIUM IV.

Dato Binomio, facile inveniuntur producta omnia litteralia sub potestate qualibet z^l in Trinomio ordinanda; etenim si multiplicentur producta illa litteralia Binomiali quae potestatibus $z^1, z^{l-2}, z^{l-4}, z^{l-6}$ &c. adscribuntur, ordinatam per $1, c, c^2, c^3$ &c. producta haec simul sumpta efficiunt producta desiderata. Eodem modo, dato Trinomio, vel Serie Trinomiali amula, facile inveniuntur producta omnia sub eadem potestate z^l in Quadrinomio ordinanda; etenim si multiplicentur producta illa litteralia Trinomiali, vel Serie Trinomiali amulae, quae potestatibus $z^1, z^{l-3}, z^{l-6}, z^{l-9}$ &c. adscripta sunt, per $1, d, dd, d^3$ &c. ordinatam, obtinebuntur producta desiderata; eadem vero est ratio reliquorum.

COROLLARIUM V.

Hinc numerus productorum sub eadem potestate z^l Multinomiali cujuscunque ordinandorum facile invenitur.

COROLLARIUM VI.

Ex iis quae haecenus diximus, illud satis facile colligitur, Coefficientes cuilibet producto Trinomiali apponendas, ex Coefficientibus Binomiali ad intervalla quaeque bina positis deduci posse, & eodem modo posse deduci Coefficientes Quadrinomiali ex Coefficientibus Trinomiali ad Intervalla quaeque terna positus, & sic deinceps; possunt itaque Coefficientes cuilibet producto apponendae in Multinomio quolibet dato dupliciter obtineri, vel ex producto ipso, vel ex Coefficientibus producti cujusdam in Multinomio uno gradu inferiore recipiendi.



$$+ A = \dots\dots\dots b^{2n}$$

$$- B = \dots\dots\dots - \frac{1}{b^{2n+1}} \times b^{2n+1} \times b^{-n} c$$

$$+ C = \dots\dots\dots + \frac{1}{b^{2n+1}} \times \frac{1}{b^{2n+2}} \times b^{1-2n} c c$$

$$- D = \dots\dots\dots - \frac{1}{b^{3n+1}} \times \frac{1}{b^{3n+2}} \times \frac{1}{b^{3n+3}} \times b^{1-3n} c c c$$

$$\mathcal{E}c. \dots\dots\dots \mathcal{E}c.$$

$$- a = \dots\dots\dots - b^{1-1} c^1$$

$$+ b = \dots\dots\dots + \frac{1}{b^n} \times b^{1-1} c^n$$

$$- c = \dots\dots\dots - \frac{1}{b^{2n}} \times \frac{1}{b^{2n+1}} \times b^{1-2n} c c$$

$$+ d = \dots\dots\dots + \frac{1}{b^{3n}} \times \frac{1}{b^{3n+1}} \times \frac{1}{b^{3n+2}} \times b^{1-3n} c c c$$

$\mathcal{E}c.$

$\mathcal{E}c.$

ubi animadvertendum est terminum assignatum ex duplici serie constari, altera quæ priorem Numeratoris partem, altera quæ posteriorem respicit.

Huc refertur potest Theorema pulcherrimum Clarissimi viri Nic. Bernoulli, *Actis Philosophicis* N^o. 341. inferum, quo exhibetur Ter-

minus quivis seriei cuiusdam fractionum quarum prima sit $\frac{1}{2^{n-1}}$, se-

quentes vero sic constituentur ut earum Denominatores crescant in proportionem dupla, Numeratores autem sint summae tot Numeratorum proximæ antecedentium quot sunt Unitates in $n-1$; hujus generis est subiecta series.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} \mathcal{E}c. \text{ vel hæc}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{4}{64} + \frac{7}{128} + \frac{13}{256} + \frac{24}{512} \mathcal{E}c.$$

in quarum prior est $n=3$, in posteriore vero $n=4$.

In serie quacunq; juxta legem memoratam confecta, invenit Vir Cl. terminum quemvis, cujus locus designatur per numerum p , primo excepto, sic exprimi posse.

$$\begin{aligned}
 & \dots \dots \dots \frac{p-n+1}{1 \times 2^{2n}} \\
 & \dots \dots \dots + \frac{p-2n \times p-2n+3}{1 \times 2 \times 2^{2n}} \\
 & \dots \dots \dots + \frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{2n}} \\
 & \dots \dots \dots + \frac{p-4n \times p-4n+1 \times p-4n+2 \times p-4n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{2n}} \\
 & \dots \dots \dots + \text{Ec.}
 \end{aligned}$$

Invenit præterea summam terminorum omnium esse

$$\begin{aligned}
 & \frac{p+1}{1 \times 2^n} - \frac{p-n \times p-n+3}{1 \times 2 \times 2^{2n}} + \frac{p-2n \times p-2n+1 \times p-2n+5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^{3n}} \\
 & - \frac{p-3n \times p-3n+1 \times p-3n+2 \times p-3n+7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2^{4n}} + \text{Ec.}
 \end{aligned}$$

Eruditissimus Auctor harum Serierum in Epistola ad Cl. *Monmort* scripta, demonstrationem indicavit his verbis: facile invenietur demonstratio harum formularum, fingendo Numeratorem termini cuiuscunque summam esse omnium antecedentium, cum revera sit tantummodo summa tot antecedentium quot sunt Unitates in $n-1$, tum subtrahendo quicquid debito majus hac ratione collectum fuerit. Jam vero cum hæc verba illud prima fronte innuere videantur excessum ex regula præscripta oriundum, simul & semel resecandum esse, quod profus a mente Cl. Viri alienum foret, non abs te, fastidum me arbitratu sum, si uno exemplo ostenderem quo sensu verba prædicta sint accipienda. Sit igitur Series

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} + \frac{8}{128} + \frac{13}{256} + \frac{21}{512} + \frac{34}{1024} \text{ Ec.} \text{ cujus}$$

Denominatores crescant in propositione dupla, Numeratores vero sint summe binorum antecedentium; finge Numeratores singulos esse summas omnium antecedentium, tunc Series evadet

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{4}{32} + \frac{8}{64} + \frac{16}{128} + \frac{32}{256} + \frac{64}{512} + \frac{128}{1024} \text{ Ec.}$$

$$\text{sive } \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \text{ Ec.}$$

quæ cum justo major sit, scribatur Series

$$-\frac{2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{4}{4} - \frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{7}{4} \text{ \&c.}$$

cujus Numeratores sunt summae Numeratorum precedentis Series primo suo termino multata; porro cum hæc series magis quam par sit excessui antecedentis Series adimat, addatur Series

$$\frac{2}{112} + \frac{1}{112} + \frac{2}{112} \text{ \&c.}$$

cujus Numeratores sunt summae omnium Numeratorum precedentium Series proximè anterioris, & sic deinceps scribantur Series eodem modo connectæ, alternatimque negativæ & affirmativæ; & eadem est ratio omnium hujus generis Serierum quæ sub ea limitatione cadunt quam descripsit Vir Clarissimus.

Quod summas atinet, nihil est quod ea lectorem moleantur, etenim cum in singulis his Seriesbus, Denominatores terminorum sint æquales, Numeratores vero consent ex terminis quorum ultimæ differentie evadunt tandem æquales, quod faciendum superest ut summae obtineantur, facile ex Methodo Differentiarum elicietur.

Illud observari potest, quod si in expressione quæ designavimus terminum Series trinomialis natæ ex divisione quantitatis $1-z$ per $1-bz+cz^2$, loco quantitarum b, z, c, l , substituatur ordinatum,

$$2, \frac{1}{2}, 1, p-1, \text{ tunc Fractio } \frac{A-a-B+b+C-c-D+d}{2^{p-1}} \text{ \&c. exhibe-$$

bit terminum desideratum, eo profus modo quo exhibitus fuit a

Doctissimo Viro





LIBER V.

De Binomio $a+b$ ad Potestatem permagnam everso.

CAPUT I.



Elberinus Vir Jacobus Bernoulli, in eximio suo Tractatu de Arte coniectandi, cum id sibi inquirendum constituisset, quantopere in rebus humanis, experimentis fidendum sit; in hanc devenit quaestionem, utrum ex repetitis experimentis ita continuo augeatur probabilitas assequendae rationis inter numeros casuum quibus Eventus aliquis contingere, & quibus non-contingere possit, ut probabilitas haec tandem datum quemvis certitudinis gradum superet.

Ut mentem suam melius patefaciat, sequentia praemittit: 'pono in Urna quadam te infcio reconditos esse ter mille calculos albos, & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploratum educere calculum unum post alterum (reponendo tamen singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligas ne numerus calculorum in Urna minuat) & observare quoties albus, & quoties ater exeat. Queritur utrum toties hoc facere possis, ut decuplo, centuplo, millecuplo &c. probabilius fiat (hoc est ut moraliter tandem certum evadat,) numeros vicium quibus album, & quibus nigrum eligis, eandem rationem sequi alteram qua ipsi calculorum seu casuum numeri gaudent, inter se habituros quam aliam quamlibet rationem ab ista diversam &c.

'Probe notandum est quod rationem inter numeros casuum, quam experimentis determinare aggredimur; non praecise & in-

indi-

indivisibile acceptam velint (sic enim contrarium profus eveniret, eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam esse, quo plures caperentur observationes) verum rationem in aliqua latitudine sumptam, id est binis limitibus conclusam, sed qui tam arcti constitui possunt quam quis voluerit. Nimirum si in Exemplo calculorum modo allato, duas rationes assumamus $\frac{301}{300}$, & $\frac{299}{300}$, vel $\frac{3001}{3000}$ & $\frac{2999}{3000}$ &c. quarum una proxime major, altera proxime minor est sesquialtera, ostenderetur quod quavis probabilitate probabilis fieri possit, rationem per Experimenta crebro repetita inventam intra hos limites rationis sesquialteræ quam extra casuram esse. Quibus positis, Vir Clarissimus ad investigationem se accingit, quam cum æque feliciter ac raro ingenii acumine absolvisset, sic denuum concludit,

Sit $\frac{r}{s}$ ratio casuum data, $\frac{r+1}{r}$, & $\frac{r-1}{r}$ limites rationis, (facto $r+s=f$). Jam cum per se pateat quod quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r , s , t , eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{r}$, & $\frac{r-1}{r}$, idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$ per experimenta determinanda sit, exempli gratia sesquialtera, pro $r \text{ & } s$ non pono 3 & 2, sed 30 vel 20, sufficiat posuisse $r=30$, $s=20$, & $t=r+s=50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{r} = \frac{31}{30}$ & $\frac{r-1}{r} = \frac{29}{30}$;

& statuantur insuper $m = \frac{\log. c \times s - 1}{\log. r + 1 - \log. r}$, atque $p = \frac{\log. c \times r - 1}{\log. s + 1 - \log. s}$, sumatur major quantitarum $mt + \frac{mt-sf}{r-1} = 24728$, & $pt + \frac{pr-tf}{s-1}$

$= 25550$, & per demonstrata inferatur*, quod institutis 25550 experimentis, multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numeris calculorum alborum obtinebit ad numerum omnium, intra limites $\frac{31}{30}$, $\frac{29}{30}$ casuram quam extra. Atque eodem modo posita $c = 10000$ aut $c = 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius

* Vide Librum *De Arte Conjectandi*, a Pag. 223 usque ad 239, ubi proprietates quædam Bicornii ad potestatem per magnam evecti exquiruntur.

fore, si fiant experimenta 31258; & plufquam centis millicies si capiuntur 36966 &c. & fic porro in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis.

Clariffimus Vir *Nicolaus Bernoulli* paulo aliter argumentum illud pertractavit; is enim non inquirat quanta copia experimentorum requiratur ad determinandum eum probabilitatis gradum quo quis poffit affirmare, futurum fore data quavis probabilitate probabilius, ut contingentia & non-contingentia intra limites assignatos conflant quam quod ultra divergentur: fed ex dato experimentorum numero id fufcipit determinandum, quanto probabilius futurum fit ut eventus de quo agitur neque frequentius fe proferat, neque rarius, quam fecundum rationem quamlibet assignatam. Ut vero mens Cl. Viri melius innotefcat, exemplum ab ipfo altarum huc transferendum cenfui.

Affumit experimenta 14000= n . Facilitates contingentiae & non-contingentiae in fingulis experimentis ponit ut 18 ad 17, ceu generaliter ut m ad f , cumque fit 14000 multiplex fummae 18+17 in earatione quam habet 40 ad 1, ponit $p=40$, unde erit $mp=7200$, & $fp=6800$: limes l assignatur 163: jam id fibi proponit inquirendum quam probabile fit ut eventus de quo agitur neque frequentius fe proferat quam $mp+l$ vices, neque rarius quam $mp-l$.

Quod ut afequatur, obfervat Autor fere ut fi Binomium $m+f$ ad potestatem n feu $mp+mf$ attollatur, Indices quantitarum m & f , in illo potestatis termino cujus locus designari poteft per $k-1$, futuri funt $n-k$ & k refpective, ita ut fi fuerit A Coefficiens istius termini, quantitas $Am^{n-k}f^k$ designatura fit illum casuum numerum quibus eventus toties fe proferre poffit, & toties fe subducere, quoties Unitas reperitur in indicibus $n-k$ & k ordine fumptis. Hoc pofito, id ulterius inquirat quam rationem habiturus fit is terminus cujus locus est $fp+l$, ad eum terminum cujus locus est $fp-l+1$, deinde quam rationem habiturus fit terminus idem $fp-l+1$ ad terminum $fp+l+1$; binarum harum rationum ponit minorem = q ; tum demonftrat terminos omnes Binomii inclufos intra fedes designatas per $fp-l+1$, & $fp+l+1$, multo majorem habituros rationem ad terminos omnes extra has fedes pofitos, quam quantitas $q-1$ habeat ad 1.

Jam ut obtineat quantitatem q , convertit Vir Cl. progressionem quandam Arithmeticam ex Binomii formatione depromptam in geometricam alteram, quod fibi licitum effe fumiit, praefertim fi fuerit n maximus numerus, quo facto devenit gradatim ad binas quantitates

$$\frac{fp-l}{mp-l+1}$$

$$\frac{m^l-1}{f^l-1+1} \times \frac{m^l-1}{m^l} \times \frac{f^l}{f^l}, \text{ \& } \frac{f^{l+1}}{m^{l+1}-1+1} \times \frac{f^{l+1}}{f^l} \times \frac{m^{l+1}}{f^l}, \text{ quae sunt}$$

æ ipsæ quantitates, minori quarum æquanda est quantitas q .

In speciali applicatione ad números, positis ut prius $n=14000$, $mp=72000$, $fp=6800$, invenit priorem harum quantitarum $= 44 \frac{74}{100}$, posteriorem vero $= 44 \frac{51}{100}$, cui utpote minori ponit q æqualem, ideoque $q-1=43 \frac{51}{100}$, unde demum concludit fore ut si fiant experimenta 14000, probabilitas futurum sic ad minimum in ea ratione quam habet $43 \frac{51}{100}$ ad 1, eventum illum cuius contingentia in singulis experimentis est ad non-contingentiam ut 18 ad 17, neque sæpius se offensurum quam 7363 vices, neque rarius quam 7037.

CAPUT II.

CUM aliquando labente Anno 1721, Vir Clarissimus *Alex. Cuning* Eq. Au. Regis Societatis Socius, quaestionem infra subiectam mihi proposuisset, solutionem problematis ei postero die tradideram.

PROBLEMA I.

Collatores duo A & B quorum dexteritates ponantur æquales, Spectatori cuidam ita se obstringant, ut post elapsam numerum n ludorum parem, uter victorem se præstiterit, is ei tot nummos largitus sit quot plures ludos vicerit quam qui desigmentur per $\frac{1}{2}n$; queritur quanti æstimanda sit Expectatio Spectatoris.

SOLUTIO.

Denotet E medium terminum Binomii $a+b$ ad potestatem n re-
vecti, positis æquallim a & $b=1$. tunc erit $\frac{1}{2}nE$, Expectatio quaesita.

INVESTIGATIO.

Sit E terminus medius, seu potius Coefficientis termini medii potestatis $a+b^n$, D & F Coefficientes terminorum hinc inde medio proxime adstantium, C & G Coefficientes terminorum binis intervalis a medio distantium, & sic deinceps pergendo utrinque a medio ad utrumque extremorum.

Jam ex formatione Binomii, palam est terminum medium eos casus designaturum quibus accidere possit, ut neuter Collusorum alteri præpollcat, terminos huic proxime adstantes eos casus designaturos quibus possit evenire, ut alter alterum sit superaturus ludis binis, seu ut eorum alter numerum $\frac{1}{2}n$ sit superaturus ludo uno; terminos his deinde proximos designaturos hos casus quibus accidere possit, ut eorum alter alterum sit superaturus ludis quaternis, seu ut numerum $\frac{1}{2}n$ superaturus sit ludis binis, & sic deinceps progrediendo ad terminos extremos.

Erit igitur Expectatio spectatoris in ludorum numero pari

$$= E \times 0 + \overline{D} + \overline{F} \times 1 + \overline{C} + \overline{G} \times 2 + \overline{B} + \overline{H} \times 3 + \overline{A} + \overline{K} \times 4 \quad \text{Ec.} \text{ five}$$

propter Aequalitatem Coefficientium hinc inde a Medio aequaliter distantium, erit Expectatio spectatoris = $E \times 0 + 2D + 4C + 6B + 8A$ Ec.

Sed ex Proprietate Coefficientium, invenietur esse

$$\begin{aligned} \overline{n+2 \times D} &= nE \\ \overline{n+4 \times C} &= \overline{n-2 \times D} \\ \overline{n+6 \times B} &= \overline{n-4 \times C} \\ \overline{n+8 \times A} &= \overline{n-6 \times B} \\ \overline{n+10 \times 0} &= \overline{n-8 \times A} \end{aligned}$$

Ec.

Ec.

Jam cum summa prioris Columnæ aequalis sit summæ posterioris, erit

$$nD + nC + nB + nA \quad \text{Ec.} = \quad nE + nD + nC + nB + nA \quad \text{Ec.}$$

$$+ 2D + 4C + 6B + 8A \quad \text{Ec.} = \quad - 2D - 4C - 6B - 8A \quad \text{Ec.}$$

tum deletis hinc inde terminis aequalibus, ceterisque ad eandem partem transpositis, fiet

$$4D + 8C + 12B + 16A \text{ Ec.} = E, \text{ seu } T \text{ cum } 4D + 8C + 12B + 16A \text{ Ec.} = \frac{1}{2}nE.$$

Erit igitur Expectatio Spectatoris, in ludorum numero pari $= \frac{1}{2}nE$, qualis a nobis fuerat determinata.

COROLLARIUM.

Quo plures ludi transiguntur, eo plaris valet fors spectatoris; attamen eo propius ludi quibus *A* vincit *B*, & ludi quibus *B* vincit *A* ad rationem aequalitatis accedunt.

Eodem procedendi modo, solutum fuerat Problema sequens ab eodem Cl. viro etiam propositum, ejusdem generis ac superius sed multo latius patens.

PROBLEMA II.

Collusores duo *A* & *B* quorum dexteritates sunt in ratione data *a* ad *b*, spectatori cuidam ita se obstringant, ut possit conclusum quemlibet ludorum numerum *n* quem *a* + *b* metiunt, *A* sit ei tot nummos largiturus quot ipse plures ludos vicerit quam qui desigmentur per $\frac{a}{a+b}n$; similiter *B* sit ei largiturus tot nummos quot ipse plures ludos vicerit quam qui designentur per $\frac{b}{a+b}n$, quaeritur fors spectatoris.

SOLUTIO.

Designet *E* terminus ille Binomii *a* + *b* ad potestatem *n* erecti, in quo indices quantitatum *a* & *b* eam rationem inter se habeant quae est *a* ad *b*, sit *p* index quantitatis *a*, *q* index quantitatis *b*; quibus positis, fors spectatoris ab utroque Collusorum oriunda, recte designabitur per $\frac{2pq}{n \times a + b} E$, vel ab eorum utrolibet per $\frac{pq}{n \times a + b} E$.

COROLLARIUM.

Quo plures ludi transiguntur, eo plaris fors spectatoris valet, attamen eo propius ludi quibus *A* vincit *B*, & ludi quibus *B* vincit *A*, ad rationem *a* ad *b* accedunt.

Jam vero cum Terminis mediis Binomial ad potestatem parem evecti tot factores $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ &c. requiratur quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$, patet terminum illum in potestate permagna, qualis foret 10000, methodo vulgari obtineri non posse nisi labore prope immenso, ne dicam impossibili.

Quam ob causam, cum a me quaesivisset vir supra laudatus, num possem methodum aliquam excogitare qua terminum illum assequi liceret citra molestiam multiplicationis, vel quod eodem fore recideret, additionis Logarithmorum, respondi me si libuisset eorum ipso tenaturum quid in hac re prestare possem, quandoquam non mihi quidem suppeteret magna spes successus, cui cum ille assensus esset, ad opus me contuli quod, intra spatium unius circiter horae, eò perduxi ut potuerim solutionem sequentis Problematis prope elicere.

PROBLEMA III.

Invenire Coefficientem Termini medi potestatis permagna & paris, seu invenire rationem quam Coefficientis termini medi habeat ad summam omnium Coefficientium.

SOLUTIO.

Sit n Index potestatis ad quam Binomium $a+b$ attollitur, tunc erit, positis a & b sigillarim $= 1$, ratio Termini medi ad potestatem ipsam $a+b$ seu 2^n , ut $\frac{2 \times n - 1}{n}$ ad 1 prope.

Sed cum quaedam Series quibus Quaestio poterat accuratius determinari, ob temporis angustiam neglectae fuerant, calculo postea re-dintegato, quantitates principales prius neglectas in usum resumpsi, quo factum est ut mihi demum concludere liceret, rationem quasi-

tam esse $\frac{2 \frac{21}{125} \times n - 1}{n}$, seu $\frac{2 \frac{21}{125} \times 1 - 1}{n}$ ad 1 proxime.

PROBLEMA IV.

In Potestate permagna & pari, invenire rationem Coefficientis Termini medi ad Coefficientem Termini distantis a medio, Intervallo dato P.

SOLUTIO.

Sit M Coefficientis Terminum medii, $\mathcal{Q}$ Coefficientis Terminum distantis a medio intervallo dato p sit n index potestatis; pone $n=2m$ tunc erit

$$\frac{M}{\mathcal{Q}} = \frac{m \rightarrow p - 1^{m-p+\frac{1}{2}} \times m \rightarrow p + 1^m}{m^{2m}} \times \frac{m-p+\frac{1}{2}}{m}$$

Comparavi mihi Tabulam exhibentem decenas quasque summas novies Centenorum Logarithmorum, ad quatuordecim loca decimalium computatam, ex qua mihi constat me posse, in magna qualibet potestate, per superiorem Canonem, invenire rationem Terminum medii, ad Terminum quolibet distantem a medio per intervallum haud ita magnam, ad sex aut septem loca Decimalium, & rationem termini medii ad terminum distantem ab ipso per intervallum quantumvis magnam, ad tria vel saltem duo loca Decimalium.

Tabula Summarum Logarithmica.

10	6.55977303287678	230	444.88979205416048
20	18.38613461687770	240	468.60937810834794
30	32.42367007492572	250	492.50959579816190
40	47.91165506815591	260	516.58323038531269
50	64.48308487247209	270	540.82362146345295
60	81.92018484939024	280	565.22460144971654
70	100.07841503568004	290	589.78044277179860
80	118.85473712249966	300	614.48581244647387
90	138.17194519001086	310	639.33573262820106
100	157.97001305471585	320	664.32554627685328
110	178.20092704487008	330	689.45088710873828
120	198.82540324721977	340	714.70765318735691
130	219.81070255614815	350	740.09198361893279
140	241.12911938869639	360	765.60023790941998
150	262.75690281092616	370	791.22897761354658
160	284.67346564068298	380	816.97494996633600
170	306.66079139482847	390	842.83307323640306
180	329.30298082389393	400	868.80642358042588
190	351.98589923663535	410	894.88622321121630
200	374.89689804274044	420	921.07181971935465
210	398.02459201763624	430	947.36072641107526
220	421.35867894483259	440	973.75051354434285

450	1000.23890036109930	680	763.79479638119554
460	1026.82369782727267	690	792.15483284830559
470	1053.50281200366230	700	820.57776715588503
480	1080.27423798062506	710	849.06270134357546
490	1107.13605431786673	720	877.60876273040337
500	1134.08641793783508	730	906.21510286206569
* 510	292.31713584693335	740	934.88089651586875
520	319.43935512714182	750	963.60534057942556
530	346.64501745623663	760	992.38765387953067
540	373.93254973375792	770	1021.22707525791203
550	401.30043707843343	780	1050.12286349081808
560	428.74721965475621	790	1079.07429634963075
570	456.27148972609533	800	1108.08066987990954
580	483.87188891447903	810	1137.14129771646564
590	511.54710564924395	820	1166.25551043224295
600	539.29587278855310	830	1195.42265491894594
610	567.11696539938536	840	1224.64209379750205
620	595.00919868301335	850	1253.91320485658439
630	622.97142603424363	860	1283.23538051754425
640	651.00253722380840	870	1312.60802732421889
650	679.10145669429300	880	1342.03056545618557
660	707.26714196086952	890	1371.50242826413045
670	735.49858210890182	900	1401.02306182608989

Uſus autem hujus Tabulae talis eſt, ut ſi requiratur Coefficientis medii Terminum poteſtatis cujuſlibet paris, non ſuperantis 900 eam aſſequi licebit facillime.

Etenim poſito n Indice poteſtatis datae, ſumatur ſumma logarithmica numerum n reſpiciens, tunc ex ea ſumma ſubtrahatur dupla ſumma reſpondens numero $\frac{1}{2}n$, reſidua ſumma erit logarithmus Coefficientis medii Terminum. Exempli gratia ſi ſit $n=900$.

Summa logarithmica numero n reſpondens, erit 1401.0230618260
cui ſi addatur ex praſcripto - 868.8064235804

Summa erit 2269.8294854064
e qua ſi ſubtrahatur dupla ſumma numero $\frac{1}{2}n$ reſpondens viz. 2000.4778007220

NB. Ad ſummas quae reſpiciunt majores numeros quam 900, adde perpetuo 868.80642358042588.
relin-

relinqueatur logarithmus termini medi $= 269.3516846844$
 e quo si iterum subtrahatur log. quantitatis $2^{20} = 270.9269960400$
 quod superest nimirum 8.4246886444
 erit logarithmus rationis Terminum medi ad summam omnium terminorum, quæ proinde erit 0.026588 prope.

Experiri jam licet nam eadem Conclusio prope deduci possit ex

Formula $\frac{2^{\frac{21}{125}} \times n - 1^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, ad hunc modum

$$\text{Log. } n-1 = 2.9537596917$$

$$\text{qui multiplicatus per } n - \frac{1}{2} = 900 - \frac{1}{2}$$

$$\text{productus logarithmus erit} = \begin{array}{r} 2.658.3837225300 \\ - 1.4768798458 \end{array}$$

$$\text{est igitur logarithmus } n - 1^{n-\frac{1}{2}} = 2656.9068426842$$

$$\text{sed Logarithmus } 2^{\frac{21}{125}} = 0.3360592778$$

$$\text{Quapropter logarithmus } 2^{\frac{21}{125}} \times n - 1^{n-\frac{1}{2}} = 2657.2429019620$$

$$\text{sed log. } \dots n^n = 2658.8282584600$$

$$\text{adeoque log. } \frac{2^{\frac{21}{125}} \times n - 1^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} = 8.4246435020$$

cui respondet numerus 0.026585 qui ex Tabula prodierat 0.026588 .

Ut inveniatur ope Tabulae nostræ Coefficientens termini distantis a medio in potestate non superante 900 , id perficitur ad hunc modum.

Addantur in unum summæ logarithmicæ respondentes numeris $\frac{1}{2}n-p$, & $\frac{1}{2}n-p$, subducaturque aggregatum ex summa logarithmica numero n adscripta, quo facto obtinebitur logarithmus Terminum quaesiti.

Jam vero, si subtrahatur logarithmus modo obtentus e logarithmo termini medi, residuus erit logarithmus rationis termini medi ad terminum illum cujus distantia a medio designatur per p . Exempli gratia, si ponatur $n=900$, $p=30$; erit $\frac{1}{2}n-p=480$, & $\frac{1}{2}n-p=420$.

P

Summa

Summa respondens numero 480 = 10802742379806

Summa resp. num. 420 = 9210918297193

Aggregatum = 29013460676999

quo subtracto ex numero 900 adscripto = 2269.8294854064

residua summa erit log. termini quæstæ = 268.4834177065

quâ subtractâ ex log. termini medii = 269.3516846844

residuum erit log. rationis quæstæ = 0.8682669779

unde ratio quæstæ erit ut 7.38358 ad 1 proxime.

Jam experiamur an Logarithmus hujus rationis prope elicia-

tur ex formula $\frac{m+p-1^{m+p-\frac{1}{2}} \times m-p+1^{m-p+\frac{1}{2}} \times \frac{m-p}{m}}{m^2m}$

Log. $m-p-1 = 2.6803355134$

$m-p-\frac{1}{2} = 480\frac{1}{2}$

Log. $m-p-1^{m+p-\frac{1}{2}} = 1285.2208786753 =$

Log. $m-p+1 = 2.6242820958$

$m-p+\frac{1}{2} = 420\frac{1}{2}$

Log. $m-p+1^{m+p+\frac{1}{2}} = 1103.5106212839$

Log. $\frac{m+p}{m} = 0.0280287236$

Erit igitur log. Numeratoris = 2388.7595286828

e quo si subtr. log. Denomin. = 2387.8912624200

= m^2m

relinquuntur log. rationis desideratæ 0.8682662628

qui ex Tabula Logarithmica prodierat 0.8682669779

CAPUT III.

*De Maximo Termino Binomi $a+b$ ad Potestatem integram
eucti, posita ratione a ad b inequalitatis.*

Illud notum est quod si Binomium $a+b$ ad potestatem n attollatur, terminus quilibet cujus locus est l , designabitur per quantitatem

$$\frac{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \dots \dots \dots a^{n-l+1} b^{l-1}$$

cujus Coefficientis ad tot factores continuatur quot sunt Unitates in $l-1$.

Quamobrem si M denotaverit terminum illum cujus locus est l , terminus ei proximus versus Binomii principium erit $\frac{l-1}{n-l+2} M \times \frac{a}{b}$,

terminus vero ab altera parte ei proximus erit $\frac{n-l+1}{l} M \times \frac{b}{a}$; jam vero ex eo quod sit M major termino utrovis sibi proximo, erit

$$1 > \frac{l-1}{n-l+2} \times \frac{a}{b}, \text{ erit itidem } 1 < \frac{n-l+1}{l} \times \frac{b}{a}, \text{ unde id necessario}$$

sequitur fore ut l constiterit intra quantitates $\frac{nb+2b+a}{a+b}$, & $\frac{nb+b}{a+b}$;

atque quantitas $\frac{nb+b+a}{a+b}$, inter haec duas consistit, adeoque si ponatur esse n multiplex summae $a+b$, ita ut sit $n=a+b \times$ erit $nb+1$ quantitas designans locum maximi termini; hanc vero conclusionem Cl. Jacobus Bernoulli in libro suo de Arte conjectandi via aliquanto huic dissimili invenerat.

Propter eandem rationem, si fuerit $n-1$, multiplex summae $a+b$, ita ut sit $n-1=a+b \times$, erit $\frac{nb+a}{a+b}$, sive $nb+1$ quantitas designans locum maximi termini.

Sive fuerit n , aut $n-1$ multiplex summae $a+b$, sive non fuerit, datur nihilominus terminus maximus in Binomio $a+b^n$, ille scilicet terminus unicus, cujus locus in integris cadit intra quantitates $\frac{nb+2b+a}{a+b}$ & $\frac{nb+b}{a+b}$, at vero si nullus ceciderit integer intra has

quantitates, ipsæ erunt integræ; adeoque termini quorum loca his quantitatibus designantur ambo erunt maximi, proindeque æquales; has autem conclusiones Vir Cl. supra laudatus non memorat, utpote quæ ad scopum suum non pertinerent.

Ex quo illud fit ut si fuerit n numerus par, deturque idcirco terminus medius in potestate $a + b^n$, fuerit etiam n multiplex summae $a + b$ juxta quantitatem quandam, denotetque P Coefficientem termini maximi, terminus ille maximus futurus sit $P a^n b^n$: erunt igitur indices quantitarum a & b in illo termino directe ut quantitates ipsæ;

Si ponantur esse M Coefficientis termini medi, erit terminus ipse medius $= M a^{\frac{1}{2}n} b^{\frac{1}{2}n}$, quapropter facto $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = d$, erit ratio termini medi ad maximum ut $M b^{\frac{1}{2}n}$ ad $P a^{\frac{1}{2}n}$.

Ex eo quod sit demonstratum locum termini maximi designatum iri per $bs + 1$, sequitur intervallum inter primum terminum & terminum maximum fore bs ; jam cum sit n numerus par ex Hypothesi, erit numerus terminorum omnium in Binomio $= n + 1$, adeoque numerus intervallorum a primo ad ultimum $= n$, erit itaque $\frac{1}{2}n$ intervallum inter terminum primum & terminum medium, & $\frac{1}{2}n - bs$ intervallum inter terminum medium & terminum maximum, sed est $n = as + bs$ erit, igitur illud intervallum $= \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}bs$, sive propter $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = d$, erit illud intervallum $= d$, sed ex ante dictis, datur ratio Coefficientis M ad Coefficientem P , propter datum intervallum inter has Coefficientes, perspicuum est igitur datum iri rationem $M b^{\frac{1}{2}n}$ ad $P a^{\frac{1}{2}n}$, hoc est. termini medi ad maximum.

Eodem modo, datur ratio termini medi ad terminum quemlibet alium, etenim, sit, ut prius, M coefficientis termini medi, L coefficientis termini cujus intervallum a primo sit p , medius terminus erit

$M a^{\frac{1}{2}n} b^{\frac{1}{2}n}$, terminus alter erit $L a^{\frac{1}{2}n+p} b^{\frac{1}{2}n-p}$, si is sumatur ver-

sus Binomii principium a^n , sin sumatur ad alteram partem, erit ter-

minus ille $L a^{\frac{1}{2}n-p} b^{\frac{1}{2}n+p}$, datur ergo ratio termini medi ad ter-

minus alterum, nimirum ea quam habet M ad $\frac{L a^p}{b^p}$, vel M ad

$$\frac{L b^p}{a^p}.$$

CAPUT IV.

De Puncto Inflexus in Binomio.

SI termini omnes Binomii intelligantur normaliter erigi super lineam rectam ad intervalla aequalia, ducaturque Curva per extremitates omnium terminorum seu ordinatarum; Curva sic descripta habebit duplex punctum inflexus, unum ab utraque parte termini maximi.

Ut autem inveniatur locus ubi consistit ordinata ad cuius extremitatem Punctum inflexus positum est; sit H ordinata illa cuius locus designetur per l ; erit igitur terminus huic ordinatae proximus ver-

fus Seriei initium $= \frac{l-1}{n-l+2} \times H \times \frac{a}{b}$, terminus vero ab altera par-

te huic proximus $= \frac{n-l+1}{l} \times H \times \frac{b}{a}$; ponatur differentia termi-

norum aequalis, ita ut sit $\frac{n-l+1}{l} \times \frac{b}{a} - 1 = 1 - \frac{l-1}{n-l+2} \times \frac{a}{b}$, hinc

emerget valor quantitatis $l = \frac{a+3b+2bn \pm \sqrt{aa+6ab+bb+4nab}}{2a+2b}$.

Nollem autem mentem nostram ita accipi, quasi intelligerem Punctum inflexus sic repperitum, idem futurum fore quod Punctum inflexus in ea Curva situm, quae describeretur per extremitates interpolatas terminorum singulorum quibus Binomium tanquam repletum fingi potest; sed ad hanc speculationem sufficit quod Punctum illud quale fuit determinatum, vicinum futurum sit Puncto inflexus geometrico.

COROLLARIUM I.

Si quantitas $\sqrt{aa+6ab+bb+4nab}$ ponatur $= r$; tum sumantur termini bini unus ab utraque parte termini maximi, quorum alter, versus Binomii principium spectans, distet a Maximo per intervallum $\frac{a-b+r}{2a+2b}$, alter vero spectans versus Binomii finem, distet a Maxi-

mo

no per intervallum $\frac{b-a+r}{2a+2b}$; in utroque eorum collocabitur punctum

inflexus: unde liquet quod si fuerint a & b aequales, punctum inflexus utrumvis distabit a Maximo termino, id est hoc in casu a

Medio per Intervallum $\frac{1}{2}\sqrt{n+2}$, quod si n denotaverit permagnam potestatem, poterit intervallum illud satis bene designari per $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

COROLLARIUM II.

Si sumantur termini quolibet Binomii, modo ii jaceant inter terminum maximum, & utrumvis punctum inflexus; summa omnium major erit dimidia summa extremorum ducta in numerum terminorum, at vero si ducatur terminus ille qui medium locum obtinet inter extremos in numerum terminorum, productus numerus major erit summa omnium; si sumantur termini quolibet jacentes inter utrumvis terminum inflexionis & Binomii principium vel finem, contrarium eveniet; hinc facilis poterit fieri conjectura de summa terminorum quolibet.

Hæc autem conjectura de summa terminorum juvari poterit Theoremate hic appposito, quod subsidio Methodi Differentiarum contextui; sit igitur A terminus quilibet Binomii, B terminus alter a superiore distans intervallo p , C terminus tertius a secundo distans eodem intervallo p ; quibus positis, termini omnes unitate inter se distantes, atque inter A & C intercepti, una cum extremis A & C consicient fere summam $\frac{2p+1}{6p} \times p+1 \times A+C+4p-2 \times B$.

Hoc vero ita restringi debet, ut intervallum inter A & C ne sumatur nimis magnum. Eadem ratione, talia Theoremata condiderunt quocunque libitum erit quæ ad multitudinem quamlibet terminorum datam perducantur, siue terminorum intervalla fuerint æqualia siue inæqualia.





L I B E R VI.

De Seriebus Hyperbolicis, Circularibus, Mixtis, & Determinatis.

C A P U T I.

Seriem Hyperbolicam eam voco, cujus Summa pendet a quadratura Hyperbolæ.

Seriem Circularem eam voco, cujus Summa pendet a quadratura Circuli.

Seriem mixtam eam voco, cujus Summa pendet partim a quadratura Hyperbolæ, partim a quadratura Circuli.

Seriem determinatam eam voco, cujus termini procedunt per potestates quantitatis determinatæ; quod si quantitas ista determinata, æqualis fuerit Unitati, Series hoc in casu vocari potest Unitate determinata.

Anno 1702 pauca quadam a me contexta circa quadraturas Curvarum mechanicarum Actis Philosophicis interposita fuere; nunc eodem principio quo tum temporis utebar, etiamnum utens, faciedum mihi putavi ut ostenderem, quana facili negotio, ex seriebus aliquot simplicibus vulgoque notis, ascendere liceat ad Series valde implicatas; eademque opera quomodo ex seriebus quibuscumque implicatis, ad simpliciores summabiles, aliquando possit fieri regressus.

L E M M A.

Posita $v = \log. \frac{1}{1-x}$, atque idcirco $v = \frac{x}{1-x}$, Fluens quantitatis

vx^n poterit exprimi per seriem hic subiectam, nimirum per

$vx^n + 1$

$$\frac{vx^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1 \times n+1} + \frac{x^n}{n+1 \times n} + \frac{x^{n-1}}{n+1 \times n-1} + \dots + \frac{v}{n+1 \times 1}$$

cujus Demonstratio facile elicitur ex iis quæ de Curvis mechanicis olim scripsimus.

PROBLEMA. I.

Invenire Series quæ summari possint.

SOLUTIO.

CASUS I.

Posita $v = \frac{x}{1-x}$ ac propterea

$x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 \mathcal{E}c. = v$. Si multiplicetur pars utraq; Equationis proxime superioris per x , orietur nova Equatio

$$xx + \frac{1}{2}x^2x + \frac{1}{3}x^3x + \frac{1}{4}x^4x + \frac{1}{5}x^5x + \frac{1}{6}x^6 \mathcal{E}c. = vx. \text{ sed}$$

Fluens partis prioris, est $\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 \mathcal{E}c.$ & Fluens partis posterioris, ex Lemmate præmissio, est $vx + x - v$; finge nunc terminos illos in quibus v reperitur esse nihilo æquales, seu esse $xv - v = 0$; hinc erit $x - 1 = 0$, seu $x = 1$. Adeoque id conclusi poterit, Seriem infinitam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ seu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} \mathcal{E}c. \text{ esse } = 1.$$

CASUS II.

Multiplicetur tum Series logarithmica $x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 \mathcal{E}c.$

tum valor ejus v per $x^n x$, hinc erit

$$x^{n+1}x + \frac{1}{2}x^{n+2}x + \frac{1}{3}x^{n+3}x + \frac{1}{4}x^{n+4}x \mathcal{E}c. = vx^n x. \text{ adeoque}$$

$$\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{2 \times n+3} + \frac{x^{n+4}}{2 \times n+4} + \frac{x^{n+5}}{4 \times n+5} \mathcal{E}c. \text{ in infinitum æqualis}$$

$$\text{erit finitæ Series } \frac{vx^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1 \times n+1} + \frac{x^n}{n+1 \times n} \mathcal{E}c. = \frac{v}{n+1}. \text{ Po-}$$

ne

ne $\frac{v^{n+1}}{n+1} = \frac{v}{1+1} = a$. hinc erit $n = 1$; est igitur

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2 \times n+3} + \frac{1}{3 \times n+4} + \frac{1}{4 \times n+5} \text{ &c. in infinitum, equalis Se-}$$

riei finitæ $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} \text{ &c. quæ}$

ad tot terminos continuatur quot sunt Unitates in $n+1$.

COROLLARIUM I.

Si sit $n=0$, erit $\frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{4 \times 4} + \frac{1}{5 \times 5} \text{ &c.} = 1$.

$$n=1, \quad \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} \text{ &c.} = \frac{1}{2}.$$

$$n=2, \quad \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{5 \times 8} \text{ &c.} = \frac{11}{18}.$$

$$n=3, \quad \frac{1}{1 \times 5} + \frac{1}{2 \times 6} + \frac{1}{3 \times 7} + \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 9} \text{ &c.} = \frac{25}{28}.$$

De his Seriebus aliisque posthac memorandis in quibus indeter-
minata x ad Unitatem restringitur, vide ea quæ tradiderunt Cl. Viri
Leibnizius, Jacobus Bernoulli, Montmortius & Taylorus.

COROLLARIUM II.

Si sit n numerus impar, tunc ex Equatione $\frac{v^{n+1}}{n+1} = \frac{v}{n+1} = 0$,

poterit deduci $x = \frac{1}{2}$. adeoque Series infinita

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2 \times n+3} + \frac{1}{3 \times n+4} + \frac{1}{4 \times n+5} \text{ &c.} \text{ aequalis est seriei finitæ}$$

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \text{ &c. ad tot terminos continua-}$$

tæ quot sunt Unitates in $n+1$.

Quapropter si sit n numerus impar; ex summa precedentium se-
rierum emerget nova series infinita

$$\frac{1}{2 \times n+3} + \frac{1}{4 \times n+5} + \frac{1}{6 \times n+7} + \frac{1}{8 \times n+9} + \frac{1}{10 \times n+11} \text{ &c.} \text{ aequalis}$$

$$\text{Seriei finitæ } \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5} \text{ &c. ad tot termi-}$$

Q

nos

tinuare quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$. At vero eademdem Series

differentia emerget altera Series infinita

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{5n+6} + \frac{1}{7n+8} + \frac{1}{9n+10} \text{ &c.}$$

aqualis Seriei finite $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} \text{ &c.}$ ad tot

terminos continuare quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$

CASUS III

Resumatur Series casus primi, nimirum

$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{20}x^7 + \frac{1}{30}x^9 \text{ &c.} = vx + x = 0$. nunc si multiplicetur pars utraque Aequationis per x , sumanturque fluentes, orietur Series infinita $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{60}x^7 + \frac{1}{120}x^9 \text{ &c.}$ cujus summa aqualis erit $\frac{1}{2}xx + vx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$. Ponatur x for-

mini $\frac{1}{2}xx + vx + \frac{1}{2}x = 0$. erit igitur $xx = 2x - 1 = 0$. siue

$x = 1$, unde fiet $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6} \text{ &c.}$ in inf-

nitum $= \frac{1}{4}$.

Sed si descendere libeat ad casus alios particulares, ponatur $-vx + \frac{1}{2}x = 0$, hinc oritur $x = \frac{1}{2}$, adeoque $v = \log. 2$, ex quarum determinatione efficietur Series

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{16} \text{ &c.} = \frac{1}{4} \log. 2 = \frac{1}{8} \\ &\text{siue } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{8} \text{ &c.} \\ &= \log. 2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolvatur iterum Series

$$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{30}x^6 \text{ &c.} = vx + x - v$$

Multiplicetur pars utraque Equationis per xx , sumanturque Fluentes, hinc ori-

$$\text{etur Series infinita } \frac{x^3}{1 \times 2 \times 4} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 5} + \frac{x^5}{3 \times 4 \times 6} + \frac{x^6}{4 \times 5 \times 7} \text{ &c.} =$$

$$\text{qualis expressioni finita, } \frac{1}{2}vx^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}vxx - \frac{1}{12}xx - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}v.$$

Pote jam terminos omnes quos v afficit $= 0$, erit idcirco $\frac{1}{2}x^3 -$

$$\frac{1}{6}xx + \frac{1}{6}x = 0, \text{ sive } x^2 - \frac{1}{2}xx + 1 = 0, \text{ cujus radices erunt } 1, 1, -\frac{1}{2},$$

pone $x = 1$. hinc fiet ut Series

$$\frac{x^3}{1 \times 2 \times 4} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 5} + \frac{x^5}{3 \times 4 \times 6} + \frac{x^6}{4 \times 5 \times 7} \text{ &c. in infinitum, sit } = \frac{7}{36}$$

COROLLARIUM I.

Si ex tribus terminis quos v afficit, nimirum $\frac{1}{2}vx^2 - \frac{1}{2}vxx + \frac{1}{6}v$, seliganur duo priores, iique simul juncti ponantur aequales nihilo,

hinc erit $x = \frac{1}{2}$, sed est $x = \log \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$; erit igitur hoc in casu

$$v = \log. -2, \text{ adeoque propter terminum manentem } \frac{1}{6}v \text{ sive } \frac{1}{6} \log.$$

$$-2, \text{ Series infinita } \frac{x^3}{1 \times 2 \times 4} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 5} + \frac{x^5}{3 \times 4 \times 6} \text{ &c. facta } x = \frac{1}{2},$$

evadet infinite magna.

COROLLARIUM II.

Si ex tribus terminis $\frac{1}{2}vx^2 - \frac{1}{2}vxx + \frac{1}{6}v$, seliganur priores &

tercius, iique simul juncti ponantur aequales nihilo, evadet $x =$

$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \text{ adeoque } v = \log. \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}, \text{ quapropter summa Seriei}$$

$$\text{infinita } \frac{x^3}{1 \times 2 \times 4} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 5} + \frac{x^5}{3 \times 4 \times 6} \text{ &c. aequalis erit summae finite}$$

que assignabitur per radicalitatem.

COROLLARIUM III.

Si terminus secundus & tertius simul juncti ponantur aequales nihilo, evadet $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, adeoque $v = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}}$: posita igitur $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$,

summa *Series* infinite superscriptæ finita evadet & poterit assignari.

CASUS V.

Sumatur *Series* $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7$ &c. quam Geometrae sciunt esse logarithmum quantitatis $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; sit logarithmus iste $= v$,

erit igitur $v = \frac{x}{1-x^2}$. Multiplicetur cum *Series* infinita, cum quantitas v ipsi æqualis per x , deinde sumantur *Fluentes*; hinc oritur

$$\frac{1}{1 \times 2}x^2 + \frac{1}{3 \times 4}x^4 + \frac{1}{5 \times 6}x^6 + \frac{1}{7 \times 8}x^8 \text{ &c.} = \text{Fl. } vx; \text{ sit Fluxionem illa} = vx = q,$$

erit igitur $\dot{q} = x\dot{v} = \frac{xx}{1-x^2}$, sed notum est $\frac{xx}{1-x^2}$ esse Fluxionem logarithmi quantitatis $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

quomobrem id facile concludetur *Seriem* infinitam $\frac{1}{1 \times 2}x^2 + \frac{1}{3 \times 4}x^4 + \frac{1}{5 \times 6}x^6 + \frac{1}{7 \times 8}x^8$

&c. æqualem esse logarithmo quantitatis $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; Sit jam

$x = 1$, erit idcirco *Series* infinita

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{9 \times 10} \text{ &c.} = \log. 2.$$

CASUS VI.

Resumatur *Series* casus proxime antecedentis, nimirum

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 \text{ &c.} = v, \text{ Multiplicetur pars utraque hujus}$$

hujus Aequationis per x , deinde sumantur Fluentes; erit igitur

$$\frac{1}{1x3}x^3 + \frac{1}{4x6}x^6 + \frac{1}{7x9}x^9 + \frac{1}{10x12}x^{12} \mathcal{E}c. = \text{Fl. } vxx', \text{ Sit Fluens}$$

$$vxx' = \frac{1}{2}xxv - q, \text{ erit idcirco } q = \frac{1}{2}x^3v = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}x$$

$$+ \frac{1}{1-x}, \text{ adeoque } q = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}v, \text{ quapropter erit}$$

$$\frac{1}{1x3}x^3 + \frac{1}{4x6}x^6 + \frac{1}{7x9}x^9 + \frac{1}{10x12}x^{12} \mathcal{E}c. = \frac{1}{2}xxv + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v \text{ pone}$$

$$\frac{1}{2}xxv - \frac{1}{2}v = q, \text{ hinc exurget Series infinita}$$

$$\frac{1}{1x3} + \frac{1}{3x5} + \frac{1}{5x7} + \frac{1}{7x9} + \frac{1}{9x11} \mathcal{E}c. = \frac{1}{2}$$

C A S U S VII

Sumatur iterum Series casus quinti

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 \mathcal{E}c. = v.$$

Fiat multiplicatio hujus Aequationis per x^3x , deinde sumantur Flu-
entes; hinc orietur

$$\frac{1}{1x5}x^5 + \frac{1}{3x7}x^7 + \frac{1}{5x9}x^9 + \frac{1}{7x11}x^{11} \mathcal{E}c. = \frac{1}{4}x^4v + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}v.$$

$$\text{Pone } \frac{1}{4}x^4v - \frac{1}{4}v = q, \text{ hinc fiet } x = 1, \text{ adeoque erit}$$

$$\frac{1}{2x5} + \frac{1}{3x7} + \frac{1}{5x9} + \frac{1}{7x11} + \frac{1}{9x13} \mathcal{E}c. = \frac{1}{4}$$

Sed ex Corollario primo casus secundi, inventum fuerat

$$\frac{1}{1x5} + \frac{1}{2x6} + \frac{1}{3x7} + \frac{1}{4x8} + \frac{1}{5x9} + \frac{1}{6x10} \mathcal{E}c. = \frac{25}{48}$$

$$\text{Est igitur } \frac{1}{2x6} + \frac{1}{3x7} + \frac{1}{4x8} + \frac{1}{5x9} + \frac{1}{6x10} \mathcal{E}c. = \frac{5}{16}.$$

C A S U S VIII

Sit x arcus circularis cujus radius = 1, tangens vero = x . Notum

$$\text{est esse } x = \frac{x}{1+x^2}, \text{ adeoque}$$

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} \mathcal{E}c. = x. \text{ Multiplicetur pars}$$

utra-

utraq; Aequationis per $x^n x$, posito n numero impari, erit itaq;

$$x^{n+1}x - \frac{1}{3}x^{n+3}x + \frac{1}{5}x^{n+5}x - \frac{1}{7}x^{n+7}x \quad Ec. = x^{n+1}$$

Sumantur utrinque Fluentes, hinc fiet Summa Seriei infinitae

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+3}}{3 \times n+4} + \frac{x^{n+5}}{5 \times n+6} - \frac{x^{n+7}}{7 \times n+8} \quad Ec. \text{ equalis Summae Seriei fi-}$$

$$\text{nitae } \frac{1}{n+1} \times x^{n+1}z - \frac{x^{n+3}}{n+2} + \frac{x^{n+5}}{n+4} - \frac{x^{n+7}}{n+6} \quad Ec. = z. \text{ Jam si}$$

fuerit $\frac{n+1}{2}$ numerus par, ultimus terminus z efficietur signo negati-

vo, sin fuerit $\frac{n+1}{2}$ numerus impar, ultimus terminus signo affirmati-
vo afficietur.

I. Sit $\frac{n+1}{2}$ numerus par, ponatur itaq; $x^{n+1}z - z = 0$, hinc fiet
 $x = 1$. quapropter erit Series infinita

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3 \times n+4} + \frac{1}{5 \times n+6} - \frac{1}{7 \times n+8} \quad Ec. \text{ equalis Seriei finitae}$$

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-6} \quad Ec. \text{ quae ad tot terminos}$$

continuatur quot sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$.

II. Sit $\frac{n+1}{2}$ numerus impar, ideoque ponatur $x^{n+1}z + z = 0$, hinc

fiet $x = -1$, quod indicio est Arcum circulearem non posse destrui,
unde si ponatur v , $z = -1$, atque $x = 1$, erit Series infinita

$$\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} - \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \quad Ec. = \text{Arc. } 45^\circ = \frac{1}{2}$$

COROLLARIUM

Si sit n numerus impar, atque eodem tempore $\frac{n+1}{2}$ numerus par,
sempet invenietur Summa Seriei infinitae

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3 \times n+4} + \frac{1}{5 \times n+6} - \frac{1}{7 \times n+8} \quad Ec. \text{ equalis Seriei finitae}$$

$$\frac{1}{n+1} \times 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \quad Ec. \text{ ad tot terminos continuatae quot}$$

sunt Unitates in $\frac{n+1}{2}$.

CASUS

Iisdem positis ac in precedenti casu, resumptaque Aequatione Fluxionali $x^{n+1} + 1 = \frac{1}{2} x^{n+1} + \frac{1}{3} x^{n+1} + \frac{1}{4} x^{n+1} + \dots$ $\mathcal{C}c. = x^n x^n$, At jam si numerus p est, tunc assumptis Fluxionibus, erit $\mathcal{C}c. = x^n x^n$, At

$$\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+6}}{n+6} - \frac{x^{n+8}}{n+8} + \dots \mathcal{C}c. \text{ in infinitum equalis Series finitae } \frac{1}{n+1} \times x^{n+1} \mathcal{C}c. = \log. \sqrt{1+x^n},$$

ubi observandum est, terminum primum & ultimum semper servandos esse; ex intermediis vero tot esse sumendos quot sunt Unitates in $\frac{1}{2}n$.

COROLLARIUM

Si n ponatur $= 0$, atque $x = 1$, oritur series infinita

$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \text{Arc. } 45^\circ = \log. \sqrt{2}$. Sed ex casu quinto, invenimus Seriem infinitam

$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \log. 2 = 2 \log. \sqrt{2}$. Atque autem Series si expulsa sit per Additionem & Subtractionem hinc oritur

Series binæ alteræ, $\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{2} \log. 2$ & $\frac{1}{3 \times 6} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 10} - \frac{1}{6 \times 12} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{3} \log. 2$

$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{2} \log. 2$ & $\frac{1}{3 \times 6} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 10} - \frac{1}{6 \times 12} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{3} \log. 2$

que Series due posteriores, si ad se invicem addantur, oritur novæ

Series $\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{2} \log. 2$ & $\frac{1}{3 \times 6} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 10} - \frac{1}{6 \times 12} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{3} \log. 2$

Resumatur Series e casu tertio exoritur, minimum habentium

$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{2} \log. 2$ & $\frac{1}{3 \times 6} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 10} - \frac{1}{6 \times 12} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{3} \log. 2$

jam Multiplicetur cum Series infinita, tunc ipsius velut potes, sit

novæque Elementæ; hinc oriatur Series infinita

$\frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 8} - \frac{1}{5 \times 10} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{2} \log. 2$ & $\frac{1}{3 \times 6} - \frac{1}{4 \times 8} + \frac{1}{5 \times 10} - \frac{1}{6 \times 12} + \dots \mathcal{C}c. = \frac{1}{3} \log. 2$

Resumatur Series e casu tertio exoritur, minimum habentium

$$= \frac{1}{6}vx^1 - \frac{1}{2}vx^2 + \frac{1}{2}vx^3 - \frac{1}{6}v^2 + \frac{1}{36}v^3 = \frac{1}{12}xx + \frac{1}{6}x^2, \text{ Pone}$$

$x = 1$, hinc fiet

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7} \text{ &c.} = \frac{1}{15}, \text{ &c.}$$

Si termini bini $\frac{1}{2}vx - \frac{1}{6}v^2$ ponantur aequales nihilo, tunc erit $x = \frac{2}{3}$.

hoc autem posito, oriatur Series

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{81} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{243} \text{ &c.} = \frac{1}{81} - \frac{4}{7} \log \frac{2}{3}$$

COROLLARIUM.

Si sumatur Progressio geometrica $1 \pm x + xx \pm x^3 + x^4 \text{ &c.}$, quæ multiplicetur per x , deinde sumantur Fluentes, oriatur Series logarithmica

$$x \pm \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \text{ &c.} \text{ nimirum logarithmi}$$

quantitatis $\frac{1}{1 \pm x}$, vel $1 \pm x$, prout termini alteri signis $\rightarrow$ aut $\leftarrow$ afficiuntur.

Si sumatur Series logarithmica, eaque multiplicetur per x , tum sumantur Fluentes; oriatur Series nova cujus summa, vel per quantitates omnino rationales, vel parum per logarithmos parum, per quantitates rationales, invenitur.

Si sumatur Series novissime parva, eaque multiplicetur per x , deinde sumantur Fluentes; oriatur Series tertia cujus summa ea methodo quam antea explicavimus invenitur.

Si quando perventum fuerit ad Seriem aliquam ex earum genere quas ante descripsi, multiplicetur Series genita per x^2x , tum sumantur Fluentes; oriatur Series alia quæ erit vel omnino rationalis, vel parum logarithmica, parum rationalis.

Si Series quolibet genitæ ut supra, vel earum multiplices juxta numerum, sive eundem, sive diversum, jungantur ad libitum vel per Additionem vel per Subductionem, oriatur Series alia quarum terminales tales erunt ut eorum numeratores crescant secundum variationem omnimodas: at vero hæ Series poterunt dissolvi in componentes simpliciores ope Methodi Differentiarum vulgo notæ.

Possunt etiam Numeratores crescere alia de causâ; etenim si cum perventum fuerit ad Seriem aliquam cujus summa exhibetur in terminis finitis, multiplicetur Series genita æque ac summa ipsi competens per potestatem quamlibet x^2 , tunc sumantur Fluxiones utriusque; ex una parte oriatur nova Series terminetum quorum Numeratores

ratores crescant in progressionem arithmetica, ex altera vero parte summa Seriei exurgat.

Si multiplicetur Series nova iterum per potestatem eandem x^p , vel quatinuslibet aliam x^q , tunc sumantur Fluxiones, orietur Series tertia terminorum quorum Numeratores ita consequuntur ut eorum secundae differentiae sint aequales, hoc vero Seriei forma dabitur ex Fluxione summae Seriei antecedentis. Sicque procedere licet quousque libitum fuerit.

Si sumatur Fluens quantitatis $\frac{x}{1-x^2}$, vel $\frac{x}{1+x^2}$, vel $\frac{x}{1-x^4}$, vel

$\frac{x}{1-x^6}$, vel denique quantitatis generalis $\frac{x}{1-x^n}$, tum Fluens ista in Seriem redigatur, ex Serie sic facta signi poterunt novae Series quarum Summae dabuntur.

Si quando perventum fuerit ad Seriem aliquam ex Fluxionibus superascriptis oriundam, multiplicetur Series ista per potestatem quamlibet x^p , tunc sumantur Fluentes, obtinebuntur Series singulae quarum summae iidem dabuntur, idque per expressiones satis elegantes, praeterum si adhibeatur apta limitatio indeterminatae x ; quod in exemplo uno vel altero pateat, sit sentienda Fluens quantitatis

$$\frac{x}{1-x^n}$$

Sic x arcus circularis cuius tangens sit $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}$ ad radium $\sqrt{\frac{3}{4}}$;

tunc Fluens quantitatis $\frac{x}{1-x^3}$ erit $\frac{1}{3} \log. \frac{1}{1-x^3} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \log.$

$\frac{1-x+x^2}{1-x+x^3}$; hoc autem facile deducitur ex his quae habuimus in Libro I. & II. quapropter si redigatur quantitas fluxionalis $\frac{1}{1-x^3}$ in

Seriem infinitam, $x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots$ Fluens huius Seriei, minus

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{10}x^{10} + \dots = \frac{1}{3} \log. \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \log.$$

$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^3}$; ponatur jam huius Seriei summa, compendii causa, = p

tum fiat utrinque multiplicatio per x , erit igitur

$$xx + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{7}x^8 + \frac{1}{10}x^{13} + \frac{1}{13}x^{18} + \dots = vx, \text{ adeoque}$$

R

$$\frac{1}{2}xx$$

$$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{4x^3}x^3 + \frac{1}{7x^8}x^8 + \frac{1}{10x^{11}}x^{11} \mathcal{E}c. = Fl. vx. \quad \text{Sit Fluens quanti-}$$

$$\text{tatis } vx = vx - q, \text{ hinc fiet } q = xv = \frac{xx}{1-x}, \text{ cujus Fluens inve-}$$

$$\text{nietur} = \frac{1}{3} \log. \frac{1}{1-x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \log. \frac{1+x+xx}{1-x+xx}, \text{ inde erit Fl.}$$

$$vx = vx - \frac{1}{3} \log. \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \log. \frac{1+x+xx}{1-x+xx}; \text{ nunc si in locum}$$

quantitatis v , substituarur illius valor; hæc conclusio facile elici poteris fore

$$\frac{1}{1x^2}xx + \frac{1}{4x^5}x^5 + \frac{1}{7x^8}x^8 \mathcal{E}c. = \frac{1}{3}x \times \frac{x-1}{1} \times \log. \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}x \times \frac{x-1}{1} \times 2,$$

jam si velis ut x sit $= 1$, pars logarithmica destruetur, x vero representabit arcum triginta graduum ad Radium $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, adeoque erit

$$\frac{1}{1x^2} + \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{7x^8} + \frac{1}{10x^{11}} + \frac{1}{13x^{14}} + \frac{1}{16x^{17}} \mathcal{E}c. = \frac{1}{3}x,$$

at si posueris $x = -1$, exurget nova Series

$$\frac{1}{1x^2} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{7x^8} - \frac{1}{10x^{11}} + \frac{1}{13x^{14}} - \frac{1}{16x^{17}} \mathcal{E}c. = \frac{2}{3} \log. 2.$$

Non deerunt fortasse qui diffusi sunt conclusioni supra posita, nempe fore ut quantitas $x-1 \log. \frac{1}{1-x}$ evanescat, si ita acciderit ut x sit $= 1$;

etenim quanquam per se pateat factorem $x-1$ tunc esse nihilo equalem, attamen cum eodem tempore $\log. \frac{1}{1-x}$ fiat quantitas infinita magna, dubitatio potest oriri an quantitates illæ inter se multiplicatæ non effecturæ sint quantitatem finitam, hæc vero difficultas non melius credo colleretur, quam si quantitas x paulisper indeterminata relinquantur; porro $\log. \frac{1}{1-x}$ est $x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \mathcal{E}c. = 1$,

qui si ducatur in $x-1$, procreabitur Series

$$-x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 \mathcal{E}c. \text{ fac nunc esse } x = 1;$$

Series igitur ista in hanc alteram mutabitur

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} \mathcal{E}c. \text{ at vero Series novissima, secluso}$$

primæ ejus termino, ante demonstrata fuit $= 1$; proinde quantitas $\frac{x-1}{x-1} \log. \frac{1}{1-x}$, cum x restricta fuerit ad Unitatem, omnino destruetur.

CAPUT II.

De Regressu e Serie data ad Summam.

HActenus de inventione Serierum quæ summari possunt: sequitur nunc ut inquiramus quoniam artificio ex data Serie ad summam regredi liceat; id vero illis difficile non videbitur qui ad ea quæ ante de methodo directa habuimus attenderunt, attamen ne sit hæsitationi locus, exempla quedam de methodo inversa afferre visum est, ut Lectoribus plenius pateat quibus gradibus scopus propositus attingatur. Sic igitur summanda Series

$$\frac{x}{1 \times 3 \times 6} + \frac{x^2}{3 \times 5 \times 8} + \frac{x^3}{5 \times 7 \times 10} + \frac{x^4}{7 \times 9 \times 12} + \frac{x^5}{9 \times 11 \times 14} \text{ &c.}$$

I. Quoniam primi omnes Denominatorum factores sunt 1, 3, 5, 7, 9 &c. assumo Seriem logarithmicam

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \text{ &c.} = \log. \sqrt{\frac{1}{1-x}}$$

hunc vero logarithmum pono = v , hinc fit ut v sit = $\frac{x}{1-x}$

II. Quoniam intervallum inter primum & secundum cujuscunque Denominatoris factorem est = 2, multiplicio Seriem logarithmicam per xx , multiplicaturus per x^{n-1} si intervallum esset = n . Inde prodibit

$$x^2x + \frac{1}{3}x^4x + \frac{1}{5}x^6x + \frac{1}{7}x^8x + \frac{1}{9}x^{10}x \text{ &c.} = vx^2x, \text{ tunc assumptis Fluentibus, orietur}$$

$$\frac{1}{2 \times 3}x^3 + \frac{1}{3 \times 5}x^5 + \frac{1}{5 \times 7}x^7 + \frac{1}{7 \times 9}x^9 \text{ &c.} = \frac{1}{2}xxv + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v.$$

III. Quoniam intervallum inter secundum & tertium cujuscunque Denominatoris factorem est = 3, multiplico jam Seriem novissime par-

tam per x^2x , hinc fiet

$$\frac{1}{1 \times 3}x^5x + \frac{1}{3 \times 5}x^7x + \frac{1}{5 \times 7}x^9x + \frac{1}{7 \times 9}x^{11}x = \frac{1}{2}x^4x + \frac{1}{2}x^3x - \frac{1}{2}v^2x^2$$

assumptisque iterum Fluentibus, invenietur

$$\frac{1}{1 \times 3 \times 6}x^6 + \frac{1}{3 \times 5 \times 8}x^8 + \frac{1}{5 \times 7 \times 10}x^{10} + \frac{1}{7 \times 9 \times 12}x^{12} + \frac{1}{9 \times 11 \times 14}x^{14} \text{ &c.}$$

R 2

Quamobrem si scribar Denominata cujusque factoris sub Numeratore factoris antecedentis eradet Coefficientis medii Termini

$$\frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m-2} \times \frac{m+3}{m-3} \times \frac{m+4}{m-4} \times \frac{m+5}{m-5} \dots \frac{2m}{m}.$$

quae Series, secluso ultimo quoque termino, ad tot factores continuatur quot sunt Unitates in $m-1$. Ex quo sequitur Logarithmos factorum per Series infinitas exhibitos, sic prodituros.

$$\begin{aligned} 2 \ln \frac{1}{m} &= \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} + \frac{1}{11m^{11}} + \dots \\ 2 \ln \frac{2}{m} &= \frac{8}{7m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \frac{512}{9m^9} + \dots \\ 2 \ln \frac{3}{m} &= \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9} + \dots \end{aligned}$$

Has autem Series in Columnas perpendiculares distribuam quarum singulae tot contineant terminos quot sunt Unitates in $m-1$.

Columna I. $= \frac{2}{m} \ln 1 + \frac{2}{m} \ln 2 + \frac{2}{m} \ln 3 + \frac{2}{m} \ln 4 + \frac{2}{m} \ln 5 + \frac{2}{m} \ln 6 + \frac{2}{m} \ln 7 + \frac{2}{m} \ln 8 + \dots$

II. $= \frac{2}{3m^3} \ln 1 + \frac{2}{3m^3} \ln 2 + \frac{2}{3m^3} \ln 3 + \frac{2}{3m^3} \ln 4 + \frac{2}{3m^3} \ln 5 + \frac{2}{3m^3} \ln 6 + \frac{2}{3m^3} \ln 7 + \frac{2}{3m^3} \ln 8 + \dots$

III. $= \frac{2}{5m^5} \ln 1 + \frac{2}{5m^5} \ln 2 + \frac{2}{5m^5} \ln 3 + \frac{2}{5m^5} \ln 4 + \frac{2}{5m^5} \ln 5 + \frac{2}{5m^5} \ln 6 + \frac{2}{5m^5} \ln 7 + \frac{2}{5m^5} \ln 8 + \dots$

IV. $= \frac{2}{7m^7} \ln 1 + \frac{2}{7m^7} \ln 2 + \frac{2}{7m^7} \ln 3 + \frac{2}{7m^7} \ln 4 + \frac{2}{7m^7} \ln 5 + \frac{2}{7m^7} \ln 6 + \frac{2}{7m^7} \ln 7 + \frac{2}{7m^7} \ln 8 + \dots$

Cum primum huic investigationi operam dedi, aderat forte ad manum Tabula Cl. Viri Jacobi Bernoulli exhibens summas potestatum numerorum naturalium, cujus beneficio labor Calculi magna ex parte fuit allevatus. Quapropter ex ea Tabula tantum decipere visum est quantum ad factum pertinet: factum itaque $m-1=1$.

Summa Columnae I. erit, $\frac{55+5}{m}$

II. $\dots \dots \dots \frac{1}{3m^3} \ln 1 + \frac{1}{3m^3} \ln 2 + \frac{1}{3m^3} \ln 3 + \frac{1}{3m^3} \ln 4 + \frac{1}{3m^3} \ln 5 + \frac{1}{3m^3} \ln 6 + \frac{1}{3m^3} \ln 7 + \frac{1}{3m^3} \ln 8 + \dots$

III. $\dots \dots \dots \frac{1}{5m^5} \ln 1 + \frac{1}{5m^5} \ln 2 + \frac{1}{5m^5} \ln 3 + \frac{1}{5m^5} \ln 4 + \frac{1}{5m^5} \ln 5 + \frac{1}{5m^5} \ln 6 + \frac{1}{5m^5} \ln 7 + \frac{1}{5m^5} \ln 8 + \dots$

IV. $\dots \dots \dots \frac{1}{7m^7} \ln 1 + \frac{1}{7m^7} \ln 2 + \frac{1}{7m^7} \ln 3 + \frac{1}{7m^7} \ln 4 + \frac{1}{7m^7} \ln 5 + \frac{1}{7m^7} \ln 6 + \frac{1}{7m^7} \ln 7 + \frac{1}{7m^7} \ln 8 + \dots$

$$\text{IV.} \dots \frac{\frac{1}{4}s^4 + s^7 + \frac{7}{6}s^8 + \frac{7}{12}s^9}{7m^7} = \frac{7}{12}s^9 \mathcal{C}_c$$

$$\text{V.} \dots \frac{\frac{1}{5}s^{10} + s^9 + \frac{3}{2}s^8 + \frac{7}{5}s^7}{9m^9} = \frac{7}{5}s^7 \mathcal{C}_c$$

$\mathcal{C}_c$.

Verum ut summae summarum possint obtineri, eas iterum distribuo in Columnas perpendiculares, quarum prima, posito $\frac{s}{m} = x$;

erit $s \ln x + \frac{1}{2x^3}x^3 + \frac{1}{3x^5}x^5 + \frac{1}{4x^7}x^7 + \frac{1}{5x^9}x^9 \mathcal{C}_c$. sive

$$s \ln \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{3x^4}x^3 + \frac{2}{5x^6}x^5 + \frac{2}{7x^8}x^7 + \frac{2}{9x^{10}}x^9 \mathcal{C}_c$$

Pone $\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9 \mathcal{C}_c$. seu $\log. \frac{1+x}{1-x} = v$; tum

facta multiplicatione utrinque per x , oritur $\frac{2xx}{1} + \frac{2x^3x}{3} + \frac{2x^5x}{5} + \frac{2x^7x}{7} + \frac{2x^9x}{9} \mathcal{C}_c = \frac{5}{9}x^{10}$

deinde, assumptis utrinque Fluentibus, invenietur $\frac{2x^2}{1 \times 2} + \frac{2x^4}{3 \times 4} + \frac{2x^6}{5 \times 6} + \frac{2x^8}{7 \times 8} \mathcal{C}_c = x \log. \frac{1+x}{1-x} - \log. \frac{1}{1-x^2}$

Porro facta divisione utrinque per x , & multiplicatione per s ; seu, quod eodem recidit, facta utrinque multiplicatione per m , invenietur Series proposita

$$\frac{s^5}{m} + \frac{s^4}{2 \times 3m^3} + \frac{s^6}{3 \times 5 \times m^5} + \frac{s^8}{4 \times 7 \times m^7} \mathcal{C}_c = mx \log. \frac{1+x}{1-x} - m \log. \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \frac{2m-1}{2m-1} \log. \frac{2m-1}{2m-1} - 2m \log. m$$

Secunda Columna confituit Seriem sequentem

$$\frac{s}{m} + \frac{s^3}{3m^3} + \frac{s^5}{5m^5} + \frac{s^7}{7m^7} + \frac{s^9}{7m^9} \mathcal{C}_c$$

cujus Summa, ut notum est,

$$= \frac{1}{2} \log. \frac{m+1}{m-1} = \frac{1}{2} \log. \frac{2m-1}{2m-1}$$

Hinc summa utriusque Columnae erit $2m - \frac{1}{2} \times \log. \frac{2m-1}{2m-1}$

$- 2m \log. m$, cui si adjungatur $\log. 2$. quem se posueramus, erit aggregatum

$$2m - \frac{1}{2} \log. \frac{2m-1}{2m-1} - 2m \log. m + \log. 2$$

e quo si subtrahatur

$$2m$$

$$\begin{aligned}
2 \times \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} & \text{ & c.} \\
2 \times \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} & \text{ & c.} \\
2 \times \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} & \text{ & c.} \\
2 \times \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} & \text{ & c.}
\end{aligned}$$

Quo fiet, vestigiis insitendo solutionis precedentis, ut logarith-
mus rationis desiderata inveniat, esse =

$$\begin{aligned}
m + p - \frac{1}{2} \times \log. \frac{m+p-1}{m+p+\frac{1}{2}} \times \log. \frac{m-p+1}{m-p-1} - 2m \log. m \\
+ \log. \frac{m+p}{m} \text{ proxime.}
\end{aligned}$$

adeoque ratio desiderata ea est quam ante definivimus, nempe

$$\frac{m+p-1}{m+p+\frac{1}{2}} \times \frac{m-p+1}{m-p-1} \times \frac{m+p}{m}$$

Hic autem, Series omnes post binas logarithmicas neglectae fue-
runt, sed error hinc oriundus non est tanti momenti ut sit operæ
pretium quidquam in hac expressione immutare, atamen quibus
visum erit eam accuratiorem reddere, ii poterunt illud efficere ea
methodo quam ante exposuimus.

De Seriebus Determinatis.

Uanquam plura de his Seriebus jam antea habuimus quæ tan-
quam Corollaria ex generali quadraturarum methodo deducta
fuerunt; atamen si tales obverint Series earum summæ sepiissime
absque quadraturis invenientur, ut indimittit Vir Cl. *Jacobus Bernoulli* in Tractatu suo de Seriebus infinitis ar-
tificium exponit quo hujus generis Series quocunque libitum erit,
summabiles omnes invenire liceat, quinciam ostendit quemadmodum
in plerisque casibus e Serie data ad summam fieri possit regressus.

Assumit Autor Seriem quamlibet Unitate determinatam (utrum sit accurate summabilis nec ne, nihil refert, modo ejus termini ad nihilum perpetuo convergant) e qua Seriem eandem termino suo primo, vel terminis duobus primis, vel terminis tribus primis multarum subtrahit; inde illud sit ut quod relinquitur vel aequale sit termino primo Seriei assumptae, vel terminis ejus duobus primis, vel terminis tribus primis, & sic in infinitum. Hanc autem operandi rationem circa Series hac subtractione comparatas iterare licet, unde novae Series in infinitum exurgent quae omnes summabiles erunt.

Ut Viri Cl. Methodus exemplis illustretur; sumatur Series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ &c. e qua subtrahatur ipsa met dempto termino suo primo, hoc est subtrahatur}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ &c. quo facto, relinquitur}$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} \text{ &c.} = 1.$$

Rursus a Serie assumpta, subtrahatur ipsa met demptis duobus primis ejus terminis, hoc est a Serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ &c. subtrahatur}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \text{ &c. tunc relinquitur}$$

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} \text{ &c.} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

A Serie quam modo comparavimus, subtrahatur ipsamet dempto termino suo primo, hoc est subtrahatur Series

$$\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{6 \times 8} \text{ &c. tum relinquitur Series}$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7} \text{ &c.} = \frac{2}{3}.$$

Quaquam vero methodus a Cl. Autore adhibita eximiam praeferat simpliciter, attamen conclusiones inde derivatae, ab alia Methodo priori quidem assata, sed aliquanto latius patente, nec minus simplici, derivari possunt.

Methodus autem ea in hoc fita est, ut assumpta Serie qualibet infinita, cujus termini tunc ad nihilum perpetuo convergant, tum procedant per potestates indeterminatae x , si multiplicetur Series assumpta per Binomium vel Multinomium utcumque constatum ex quantitatibus datis & indeterminatae x , deinde ponatur Binomium vel Multinomia illud aequale nullo; hinc elicietur Valor indeterminatae x , ad quem si quantitas ista & restringatur, tunc Series ex hac multiplicatione generata evadet eadem aucto equalis; quapropter si transferatur

termini ejus primi ad alteram Aequationis partem, Series residua æqualis erit terminis transactis.

Sumatur exempli gratia Series $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4$

Ecce. quæ si multiplicetur per Binomium $x-1$, erit Series genita

$$-1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

$= f$, erit igitur summa posterioris $= x-1$; pone prioris summam datam esse, hinc dabitur summa posterioris, pone prioris summam esse incognitam, erit igitur summa posterioris incognita, quandoque steterit indeterminata x ; fac quæ $x-1=0$, quod fiet $x=1$; quapropter si in Serie genita scribatur x loco x , orietur Series

$$-1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

si transferatur ad alteram Aequationis partem, erit summa Seriei,

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{5x^4} - \frac{1}{2} = 0$$

Si sumatur Series $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4$ Ecce. $= f$, ac

quæ ea multiplicetur per $xx-1$, erit Series genita

$$-1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

$x=1$, hinc emerget Series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

oritur e Methodo Bernoulliana, cum a Serie

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4$$

bus primis terminis multata.

Si fiat multiplicatio Seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3$

Ecce. per $x-1$, deinde ponatur $x-1=0$, quo fiet $x=1$; hinc ea-

dem emerget Series eademque summa ac ea quæ deduceretur ex Me-

thodo Bernoulliana, si e Serie $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3$ Ecce. ipsa-

met Series terminis tribus primis multata subtraheretur, & sic deinceps.

Si fiat Multiplicatio Seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3$ Ecce.

per $x-1$ seu per $1-2x+x^2$, deinde ponatur $x=1$, eadem orietur Series eademque summa ac ea quæ prodiret e Methodo Bernoulliana, si

si e serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. subtraheretur ipsamet primo termino suo multata, tum e serie jam parva subtraheretur etiam hæc ipsa termino suo primo multata.

Si fiat Multiplicatio Seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3$ &c. per $x - 1 \times x^2 - 1$, seu per $1 - x - x^2 + x^3$, deinde ponatur $x = 1$, eadem orietur Series eademque summa, ac ea quæ prodiret, si ex Serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. subtraheretur ipsamet termino suo primo multata, tum e Serie jam parva, subtraheretur itidem hæc ipsa, terminis tribus suis primis multata.

Si fiat Multiplicatio Seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3$ &c. $= f$, per $2x - 1$, orietur series

$$-1 + \frac{3}{1 \times 2}x + \frac{4}{2 \times 3}xx + \frac{5}{3 \times 4}x^3 + \frac{6}{4 \times 5}x^4 + \frac{7}{5 \times 6}x^5 \text{ &c. } = 2x - 1 \times f \text{ pone } 2x - 1 = 0. \text{ erit igitur } x = \frac{1}{2}. \text{ ex quo efficietur ut series}$$

$$\frac{3}{1 \times 2} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{2 \times 3} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{3 \times 4} \times \frac{1}{8} + \frac{6}{4 \times 5} \times \frac{1}{16} + \frac{7}{5 \times 6} \times \frac{1}{32} \text{ &c. sit } = 1.$$

Hanc vero conclusionem Methodus subtractionum non aequè facile arcefferet.

Si fiat Multiplicatio seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3$ &c. $= f$, per $3x - 1$, tum ponatur $3x - 1 = 0$. hinc emerget series

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{2 \times 3} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{3 \times 4} \times \frac{1}{27} + \frac{11}{4 \times 5} \times \frac{1}{81} + \frac{13}{5 \times 7} \times \frac{1}{243} \text{ &c. } = 1.$$

Si fiat Multiplicatio Seriei assumptæ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3$ &c. $= f$, per $2x - 1 \times 3x - 1$, sive per $1 - 5x + 6xx$, series genita erit

$$+1 - \frac{9}{2}x + \frac{23}{1 \times 3 \times 3}xx + \frac{38}{2 \times 3 \times 4}x^3 + \frac{57}{3 \times 4 \times 5}x^4 \text{ &c. } = 2x - 1 \times 3x - 1 \times f,$$

pone nunc tum $2x - 1 = 0$, tum $3x - 1 = 0$. in priori casu erit $x = \frac{1}{2}$, in posteriori erit $x = \frac{1}{3}$, hinc nascentur Series bitæ

$$\frac{33}{1 \times 3 \times 3} \times \frac{1}{4} + \frac{38}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{8} + \frac{57}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{16} + \frac{80}{4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{32} \text{ &c. } = \frac{1}{4},$$

$$\frac{23}{1 \times 3 \times 3} \times \frac{1}{9} + \frac{38}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{27} + \frac{57}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{81} + \frac{80}{4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{243} \text{ &c. } = \frac{1}{8}.$$

In his autem Series differentie numeratorum sunt in progressionem arithmetica.

Eodem

Eodem modo, si multiplicetur series assumpta

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \text{ Ec. per } x = \sqrt{1 \times 2x - 1}, \text{ five per } 1 = 3x + 2x^2,$$

Generabimur Series

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{1 \times 2 \times 3}x^2 + \frac{1}{2 \times 3 \times 4}x^3 + \frac{1}{3 \times 4 \times 5}x^4 + \dots = \frac{1}{x-1 \times 2x-1 \times x^2}$$

ponere $x-1=0$. hinc erit $x=1$, itemque ponere $2x-1=0$, tunc erit $x=\frac{1}{2}$, unde binæ emergent series quarum summa dabitur, qua-

rum prior $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{6}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \frac{8}{4 \times 5 \times 6}$ &c. = $\frac{3}{2}$, posterior vero

$$\frac{-5}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{16} + \frac{8}{4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{32} \text{ Etc.} = \frac{1}{4}.$$

Quomodo autem ex data serie experiri liceat num possit summa accurata exhiberi, id melius exemplis quam præceptorum multitudine declarabimus.

Cum vero Cl. *Mammert* series aliquot ex eo genere quod Unitate determinatum appellamus ediderit, eas quas ille tanquam primarias attulit e methodo nostra deducere conabimur, paucis ante praemissis de ipsius Methodo quam Methodo Incrementorum *Taylorianæ* dixit affinem.

Sumit Vir Cl. quantitatem quamcunque, qualem v. g. $\frac{1}{p+1}$ quam statuit esse summam tot terminorum seriei cuiusdam, posthac determinandas quot sunt Unitates in p : ex hac assumptione id sequitur, quantitatem $\frac{1}{p}$ futuram esse summam tot terminorum ejusdem Seriei quot sunt Unitates in $p-1$, adeoque differentiam quantitatum $\frac{1}{p+1}$ & $\frac{1}{p}$ designaturam eum Seriei terminum cujus locus, numeratione incepta a primo termino, incidit in numerum p ; at vero differentia harum quantitatum sit $\frac{1}{p(p+1)}$, unde id necessario colligitur quod si quantitas $\frac{1}{p}$ posita fuerit successive equalis numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. hinc oritura sit Series terminorum

$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7}$ &c. quorum summa, posito p nu-
mero terminorum, conficit numerum $\frac{p}{p+1}$.

Fatendum tamen est Virum Clarissimum non ita perspicue mentem suam aperuisse; etenim cum in id videatur potissimum incubuisse

buiffe ut Theoremata plurima concinnaret, ubi mirum est ei contigisse ut veram expositionem principii in quo ea nuntur, sub obscure indicare; eos interim monendos cenſeo qui in hanc methodum penitus inſpicere velint, ut ea conſulant quæ de hoc argumento ſcripſit Vir eruditiffimus D. *Brook Taylor* in Appendice ſua ad Series *Monmortianæ* adjecto.

Series prima ex his quæ Cl. Auctor in præcipuam numero collocat, cuiusque ſummam hic exhibere aggredimur conſpicietur ſub littera *A*; ea autem ſic ſe habet

$$A = \frac{5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{9}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \frac{13}{5 \times 6 \times 7 \times 8} + \frac{17}{7 \times 8 \times 9 \times 10} \text{ &c. jam vero, quoniam}$$

Denominator quilibet ex factoribus quatuor conſtans, in factores alios ex partibus duabus conſtatos dividi poſt, quorum ſinguli binii in terminis duobus ſibi proximis ſemper repetuntur, aſſumatur ſeries

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} x + \frac{1}{5 \times 6} x^2 + \frac{1}{7 \times 8} x^3 + \frac{1}{9 \times 10} x^4 \text{ &c.} = f. \text{ Fiat nunc multiplicatio Series aſſumptæ per } x-1; \text{ hinc erit ſeries genita}$$

$$= \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6 \times 4} x + \frac{1}{7 \times 8 \times 5 \times 6} x^2 + \frac{1}{9 \times 10 \times 7 \times 8} x^3 \text{ &c.} = \frac{x-1}{x^2} \text{ pone}$$

jam $x-1=0$, tunc ſi transferatur primus terminus ad alteram æquationis partem, totumque dividatur per 2, emerget

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{9}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \frac{13}{5 \times 6 \times 7 \times 8} + \frac{17}{7 \times 8 \times 9 \times 10} \text{ &c.} = \frac{1}{4}.$$

Ac ſi id ſequatur ut non modo ſumma ſeries infinite aſſignetur, ſed ſumma terminorum quor quis aſſignare libuerit, id ad hunc modum conſicietur.

Determinetur Methodo Differentiali, de qua poſthac nonnulla ſumus dicturi, expreſſio termini cujuſlibet ex poſitione loci quem is poſceat, tunc ſi ponatur n eſſe is numerus quo designatur locus termini

$$\text{deſiderati, invenietur ille terminus } \frac{4n-1}{2n-1 \times 2n \times 2n+1 \times 2n+2},$$

adeoque poſt terminos numero n , exurger ſeries

$$\frac{4n-5}{2n-1 \times 2n+2 \times 2n+3 \times 2n+4} + \frac{4n-4}{2n+3 \times 2n+4 \times 2n+5 \times 2n+6} + \frac{4n-3}{2n+5 \times 2n+6 \times 2n+7 \times 2n+8} + \frac{4n-2}{2n+7 \times 2n+8 \times 2n+9 \times 2n+10} \text{ &c.}$$

$$\frac{4n-1}{2n+9 \times 2n+10 \times 2n+11 \times 2n+12} + \frac{4n}{2n+11 \times 2n+12 \times 2n+13 \times 2n+14} + \frac{4n+1}{2n+13 \times 2n+14 \times 2n+15 \times 2n+16} \text{ &c.}$$

Quapropter assumpta serie

$$\frac{1}{2n+1 \times 2n+2} + \frac{1}{2n+3 \times 2n+4} + \frac{1}{2n+5 \times 2n+6} + \dots$$

$$\frac{1}{2n+7 \times 2n+8} x^1 \text{ Ec. } = \int \text{ si multiplicetur haec series per } x-1, \text{ hinc}$$

oriatur nova series

$$\frac{1}{2n+1 \times 2n+2} + \frac{1}{2n+3 \times 2n+4} + \frac{1}{2n+5 \times 2n+6} + \frac{1}{2n+7 \times 2n+8} + \dots$$

$$\frac{1}{2n+3 \times 2n+4 \times 2n+5 \times 2n+6} + \frac{1}{2n+5 \times 2n+6 \times 2n+7 \times 2n+8} + \dots$$

Ec. = $x-1 \times \int$; pone $x-1=0$, inde concludi poterit, facta transpositione termini primi ad alteram Aequationis partem, totoque diviso per 2, fore

$$\frac{1}{2n+5 \times 2n+6 \times 2n+7 \times 2n+8} + \frac{1}{2n+7 \times 2n+8 \times 2n+9 \times 2n+10} + \dots$$

$$\text{Ec. } = \frac{1}{2n+1 \times 2n+2}. \text{ Patet igitur summam terminorum quorum numerus est } n, \text{ in serie a Cl. vir allata, futuram esse } \frac{1}{2n+1 \times 2n+2},$$

In eadem pagina duae aliae extant Series, quarum prior est

$$B = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11} + \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14} \text{ Ec. posterior}$$

$$C = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17} + \dots$$

De his autem Seriebus sic scribit Vir Clarissimus

Has Series jam pridem communicavi cum primariis quibusdam Geometris a quibus minime contemni videntur. Sic ad me scribit peritissimus Geometra D. Nicolaus Bernoulli in Epistola data 25^o Junii 1716. Vous me ferez un extrême plaisir, Monsieur, de me communiquer la Solution de votre Probleme, etant donnée une suite de fractions dont

dont les Numerateurs soient des nombres figures quelconques, & dont les Denominateurs soient formez du produit d'un nombre egal de facteurs qui soient en progression arithmetique, trouver la somme, & principalement comment vous avez trouvé ces deux formules

$$\text{qu'il } \frac{p}{24 \times 4p+1}, \text{ \& } \frac{p \times p+1}{12 \times 3p+1 \times 3p+2}.$$

Hæ formulæ spectant ad series C & B, designante p numerum terminorum quorum summa requiritur. Sic etiam ad me scribit D. Taylor in Epistola data 22^o Aug. 1716, Ut & qua ratione incidi in summationem serierum a te exhibitarum, præsertim loquor de serie $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$ &c. quæ videtur esse altioris indaginis.

Hactenus vir Clarissimus; nunc videamus quomodo harum Serierum summæ ex Methodo nostra deduci possint, absque ullo Theorematum apparatu, ac primum quidem de seriei signata B dicemus. Illud igitur observandum est terminum quemlibet hujus seriei designari oportere per numerum illum quo locus ejus denotatur id vero facile fiet subsidio Methodi differentiarum; sit igitur x numerus designans locum termini, porro facile patebit terminum illum sic

$$\text{expressum iri } \frac{m}{3n-2 \times 3n-1 \times 3n \times 3n+1 \times 3n+2} \text{ sive } \frac{m}{3n-2 \times 3n-1 \times 3n+1 \times 3n+2}$$

hinc palam est post terminos quorum multitudo est n , orituram hanc Seriem, nimirum

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3n-1 \times 3n-2 \times 3n-1 \times 3n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{3n-4 \times 3n-5 \times 3n-7 \times 3n-8} + \frac{1}{n+3} \times \frac{1}{3n-7 \times 3n-8 \times 3n-10 \times 3n-11} \text{ \&c.}$$

Quoniam vero Denominator quilibet hujus Seriei ex factoribus quatuor constat, quorum bini quique in termino proxime sequente

$$\text{repetuntur, sumatur idcirco series } \frac{1}{3n-1 \times 3n+2} + \frac{1}{3n-4 \times 3n+5} + \frac{1}{3n-7 \times 3n+8} + \frac{1}{3n-10 \times 3n+11} \text{ \&c.} = f, \text{ cujus bini qui-}$$

que

$$\frac{1}{24} \times \frac{1}{4n+1 \times 4n+5} + \frac{1}{4n+5 \times 4n+9} + \frac{1}{4n+9 \times 4n+13} \text{ &c.}$$

Scribatur ergo Series

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+5} x + \frac{1}{4n+9} x^2 + \frac{1}{4n+13} x^3 \text{ &c.} = f \text{ Multiplicetur hæc se-}$$

ries per $x-1$, tunc prodibit

$$-\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+1 \times 4n+5} x + \frac{1}{4n+5 \times 4n+9} x^2 + \frac{1}{4n+9 \times 4n+13} x^3 \text{ &c.}$$

$= x-1 \times f$; ponatur $x=1$, deinde transferatur terminus primus ad alteram Aequationis partem, dividanturque omnia per 4, tum fiet

$$\frac{1}{4n+1 \times 4n+5} + \frac{1}{4n+5 \times 4n+9} + \frac{1}{4n+9 \times 4n+13} \text{ &c.} = \frac{1}{4 \times 4n+1} \text{ quapropter di-}$$

visione iterum facta per 24, erit summa desiderata $= \frac{1}{96 \times 4n+1}$, po-

ne jam $n=a$, hinc perspicuum erit summam seriei E in infinitum con-
tinuatæ equalem futuram esse quantitati $\frac{1}{96}$, itemque summam ter-
minorum quorum numerus n , equalem futuram esse quantitati
 $\frac{1}{96} - \frac{1}{96 \times 4n+1} = \frac{1}{24 \times 4n+1}$.

Ex superioribus igitur liquido constat series istas *Montanianos* qua-
rum nulla quidem vel Circulum vel Hyperbolam respicit, ex Methodo
Subductionis *Bernoullianæ* quam Vir Cl. tanquam a se visam com-
memorat, vel ex multiplicatione qua utimur nullo negotio deduci
posse.

Inter Series a D. *Montmort* allatas, nulla videtur ei plus negotii con-
fecisse quam ea quæ hic subjiçiens, mirum

$$\frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{4 \times 6 \times 8} + \frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \frac{1}{6 \times 8 \times 10} \text{ &c.} \text{ cuius terminum cum ille generaliter}$$

designasset per $\frac{1}{p+1 \times p+4 \times p+6}$ post varias transformationes adducit ad

$$\frac{1}{2 \times 2+1 \times 2+2 \times 2+3 \times 2+4} + \frac{1}{2+1 \times 2+2 \times 2+3 \times 2+4} + \frac{1}{2+2 \times 2+3 \times 2+4} + \frac{1}{2+3 \times 2+4}$$

postò $p=2-2$: quibus confectis ei licuit opæ Canonica
multo labore comparatorum, summam seriei suæ exhibere.

At vero si fractio $\frac{1}{p+1 \times p+4 \times p+6}$ in hæcce binas resolvatur

$$\frac{1}{2+1}$$

$\frac{1}{p+2 \times p+4} - \frac{1}{p+2 \times p+4 \times p+6}$, vel has binas alteras $\frac{1}{p+4 \times p+6} - \frac{1}{p+2 \times p+4 \times p+6}$; quoque modo id vel denique in has tertias $\frac{1}{p+2 \times p+6} - \frac{1}{p+2 \times p+4 \times p+6}$; quoque modo id factum fuerit, patet summam Seriei propositae ex Subtractione *Bernoulliana*, vel ex nostra multiplicatione, absque ullo previo Canone statim obtentum iri.

Porro, cum magnam fecisse arbitratu sit Vir Cl. quod series eas summaverit quarum termini ita sunt constituti ut eorum Numeratores & Denominatores binas quasilibet lineas transversas Trianguli Arithmetici conficiant, libet hic dispicere quantum ille ea ratione Doctrinam serierum infinitarum promoverit.

Ut exemplis illustret Methodum qua utitur, sibi sumit summam dum numerum quemlibet datum terminorum Seriei

$$\frac{1}{1} + \frac{4}{7} + \frac{10}{25} + \frac{20}{64} + \frac{35}{125} \text{ &c.}$$

cujus Numeratores constituunt lineam quartam transversam, Denominatores vero lineam septimam transversam Trianguli Arithmetici.

Sed ex iis quae prius nota erant quam hunc locum tractaret Vir Doctissimus, Numerator quilibet, posito n numero terminorum, designari potest per $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, Denominator vero per

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6},$$

quo fit ut terminus ipse designetur per $\frac{4 \times 5 \times 6}{n+3 \times n+4 \times n+5}$, poterit igitur summa seriei vel ex subtractione *Bernoulliana*, vel ex multiplicatione nostra facillime deduci.

Novum ponit exemplum desumptum ex Serie

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{35} - \frac{1}{56} \text{ &c.}$$

cujus termini sunt terminorum seriei prioris reciproci.

Sed cum terminus hujus Seriei generaliter designari possit per $\frac{n+3 \times n+4 \times n+5}{4 \times 5 \times 6}$, patet summam terminorum quodlibet ex methodo

Differentiarum nullo negotio colligi posse.

Jam sibi exequendum fuit Autor quanam sit summa seriei cuius Numeratores consistant lineam quamlibet erectam in Triangulo Arithmetico, Denominatores vero lineam quamlibet transversam, cujus generis est Series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} \text{ &c.}$

$$\frac{1+x^{p+q-2} \times q-1 \times q-2 \dots \times 1}{p \times p+1 \dots \times p+q-2} \frac{q-1 \times q-2}{p \times p+1} x^{q-1}$$

$$= \frac{q-1 \times q-2 \times q-3}{p \times p+1 \times p-2} x^{q-4} \text{ \&c.} \text{ cuius termini consue continuari de-}$$

bent, donec eorum numerus fiat equalis quantitati q ; erit igitur sum-

$$\text{ma seriei } 1 + \frac{5}{4}x + \frac{10}{10}xx + \frac{10}{10}x^3 + \frac{5}{35}x^4 + \frac{1}{56}x^5$$

$$= \frac{1+x^1 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 7 \times 8} - \frac{3}{6}x^2 - \frac{3 \times 2}{6 \times 7}x^3 - \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 7 \times 8}$$

Atque hæc sunt fere omnia quæ circa has series *Memortianas* mihi visa fuerint aliqua consideratione digna; unica tamen superest series Viri Cl. quam hic considerare æquum esset, sed cum ea id genus serierum quas autor antea tractaverat non spectet, eam in locum commodiorem transferre satius duxi.

Id vero, donec exequamur, non alienum fore arbitror Methodo nostra paulo diutius immorari. Proponatur itaque Series

$$\frac{19}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{4} + \frac{28}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{1}{8} + \frac{39}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{16} + \frac{52}{4 \times 5 \times 6} \times \frac{1}{32} \text{ \&c.}$$

quam summari oporteat.

$$\text{Assumatur series } 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \text{ \&c.}$$

= f , in qua reperiantur factores omnes e quibus constantur Denominatores seriei propositæ: fingantur Multiplicatores bini $ax-b$, itemque $cx-d$ qui in se invicem ducti producant quantitatem $bd-adx-bcx+acxx$ per quam multiplicetur series assumpta; at vero cum series data procedat per potestates fractionis $\frac{1}{2}$, fingere licet $x - \frac{1}{2} = 0$, sive $2x-1=0$ succerit itaque multiplicatorem unum, sumere $ax-b$, posito alitero $=2x-1$: præterea cum ex horum multiplicatorum mutuo ductu generetur quantitas $b-ax-2bx+2axx$, multiplicetur series assumpta per productum istud, quo facto emerget series

$$b - \frac{3b+2a}{1 \times 2}x + \frac{9a-4b}{1 \times 2 \times 3}xx + \frac{16a-10b}{2 \times 3 \times 4}x^3 + \frac{25a-18b}{3 \times 4 \times 5}x^4 \text{ \&c.}$$

$$= 2x-1 \times ax-b \times f, \text{ erit itaque translatione facta,}$$

$$9a-4b$$

$$\frac{9a-4b}{1 \times 2 \times 3} x^2 + \frac{16a-10b}{2 \times 3 \times 4} x^3 + \frac{25a-18b}{3 \times 4 \times 5} x^4 \text{ \&c.} =$$

$$\frac{2x-1 \times ax-b \times f-b}{1 \times 2} x.$$

Comparatur nunc primus terminus hujus *Aequationis* cum termino primo seriei datae, itemque secundus cum secundo, hinc erit $9a-4b=19$, atque $16a-10b=28$, unde invenietur $a=3$, $b=2$, quamobrem summa seriei propositae erit $=1$.

Sed & eadem opera invenietur summa seriei

$$\frac{19}{1 \times 2 \times 3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{2 \times 3 \times 4} x^{\frac{2}{3}} + \frac{39}{3 \times 4 \times 5} x^{\frac{3}{5}} + \frac{52}{4 \times 5 \times 6} x^{\frac{4}{3}} \text{ \&c.}$$

etenim si ponatur $ax=b$ seu $3x-2=0$, erit jam nunc $x=\frac{2}{3}$, quo fiet ut summa seriei novissimae evadat $=2$.

Decem abhinc circiter annis, cum ego animi oblectandi gratia ad eruditissimum virum D. *Brink Taylor* scripisssem me posse accurate summam exhibere seriei

$$\frac{2}{1 \times 3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{3 \times 5} x^{\frac{1}{5}} + \frac{4}{5 \times 7} x^{\frac{1}{7}} + \frac{5}{7 \times 9} x^{\frac{1}{9}} \text{ \&c.}$$

pollicens me methodum id consiciendi ei brevi missurum, ille post lectam epistolam, cum existimaret me eodem jure id in me recipere velle ut hanc seriem ad potestates indeterminatae quantitatis transferrem, illico rescripsit se pro certo habere me id prestare non posse; ubi vero responsum miserat, mox est suspicatus me seriem hanc determinasse ad potestates fractionis $\frac{1}{3}$; quamobrem postmodum quam illius responsum acceperam, epistolam novam a Viro Cl. accepi qua significabat se ope methodi suae incrementorum summam seriei meae reperisse; at sequitur.

Pone summam Seriei aequalem quantitati f , itemque $f=\frac{x}{v}$, tum

capiendo incrementa, obinebitur $s=\frac{xv-xv}{vv} = 1$, posito v aequali

termino seriei propositae; jam facta comparatione formulae istius generalis cum serie proposita, id comperietur debere v successive respondere numeris 1, 3, 5, 7 &c. quapropter sit $v=2$; porro si x successive representet Numeratores 2, 3, 4 &c. inde evadet $v=2, 3, 4$, illud igitur efficitur ut formula in hanc transformetur, nimirum

$$\frac{2x^2 - 3x - 2x}{2x - 3 \times 2x - 2} = f; \text{ pone } n = 1, \text{ atque } x = 1 + r^1; \text{ capiantur rursus in-}$$

crementa, hinc fiet $x = r \times 1 + r^1 = rx$, cum substituendo valorem quantitatis x in ipsius locum, Numerator formulæ evadet $2rx^2 - 3rx - 2x$; at vero in Serie proposita Numerator dividatur per x , quando brevis posito $3rx + 2x = 0$, fiet $r = -\frac{2}{3}$, unde erit $1 + r = \frac{1}{3}$, quo sit ut series hinc deducenda eandem formam adipiscatur ac series proposita (ponendo scilicet $n = x - 1$) tunc facta multiplicatione per $\frac{1}{4}$

$$\text{inde emerget } f = \frac{-2x}{2x - 3 \times 2x - 1} = \frac{-x}{2x - 3 \times 2x - 1 \times 3} \text{ atque } f =$$

$\frac{3}{4 \times 2x - 3 \times 3^{x-1}}$ (ubi cum signum quantitatis r sit negativum, consequens est ut f denotet summam seriei in infinitum continuatæ,) jam vero pro x scribendo 2 (valorem nempe primi termini) habetur $f = \frac{3}{4 \times 1 \times 3} = \frac{1}{4}$.

Sub sine Epistolæ rogavit me Vir Cl. ut eum participem facere vellem Methodi meæ quam ego ultro pollicitus eram, cui cum obtemperassem, testem misit Epistolam qua me certiore fecit hanc methodum sibi multum aridere propter ejus simplicitatem, eam ad casus omnes serierum D. *Memori*, nec non ad casus magis compositos facile accommodari posse: his subiunxit exemplum novum Methodi suæ quam ad casus omnes harum serierum, cum ita acciderit ut eæ accurate summabiles fuerint, nec nimis implicate exserint transferri posse asseruit; sed eum Vir Clarissimus ipse aliquando sit expositurus methodum suam cujus pulcherrima jam dudum edita sunt specimina, de ea plura dicere nunc supersedebimus.

Modus autem quo summam seriei superscriptæ vel tot ipsius terminorum quot quis assignare voluerit inveneram, is est quem sæpius in exemplum attuli, nempe scribendo seriem

$$\frac{n+2}{2n+1 \times 2n+3} + \frac{n+3}{2n+3 \times 2n+5} + \frac{n+4}{2n+5 \times 2n+7} + \dots$$

$\mathcal{E}c. = f$, orituram post terminos n ; etenim si assumatur series

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n+7} + \dots \mathcal{E}c. \text{ fiatque}$$

multiplicatio seriei assumptæ per $3x-1$, propter x determinatam ad

ad valorem $\frac{1}{3}$, oritur series

$$-\frac{1}{2n+1}x^n + \frac{4n+8}{2n+1 \times 2n+3}x^{n+1} + \frac{4n+12}{2n+1 \times 2n+5}x^{n+2} \\ + \frac{4n+16}{2n+5 \times 2n+7}x^{n+3} \text{ \&c.} = 3x-1 \times f, \text{ unde translatò primo seriei}$$

termino ad alteram Aequationis partem, totoque diviso per 4, invenie-

tur summa seriei datae $= \frac{1}{4 \times 2n+1 \times 3^n}$, evanescente $3x-1 \times f$ prop-

ter x restrictam ad $\frac{1}{3}$ ex Hypothesi: hinc ponendo $n=0$, exurget

summa seriei infinitae incipientis a termino $\frac{2}{1 \times 3} \times \frac{1}{3}$, aequalis fra-

ctioni $\frac{1}{4}$, adeoque summa terminorum quorum numerus datus est n ,

$$\text{evadet } \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \times 2n+1 \times 3^n}$$

At vero si in Serie proposita, in locum potestatem fractionis $\frac{1}{3}$

substituantur potestates indeterminatae x , idque requiratur invenien-
dum quænam tum futura sit summa seriei datae, Problema propter
repetitos Denominatores solvi poterit per Multiplicationem, ad hunc
modum: assumpta utique serie.

$$\frac{1}{2n+1}x^n + \frac{1}{2n+3}x^{n+1} + \frac{1}{2n+5}x^{n+2} + \frac{1}{2n+7}x^{n+3} \text{ \&c.} = f, \text{ mul-}$$

tiplicetur ea per $ax-b$; hinc emerget Aequatio

$$\frac{2na+3a}{-2nb-b}x^{n+1} + \frac{+2na+5a}{-2nb-3b}x^{n+2} \text{ \&c.} = ax-b \times f + \frac{b}{2n+1}x^n, \text{ tum}$$

$$\frac{2n+1 \times 2n+3}{2n+1 \times 2n+5}$$

facta comparatione termini primi seriei genitæ, cum termino pri-
mo seriei datæ, hoc est cum termino primo eorum quos posuimus o-
rituros post numerum n , hoc est cum termino

$$\frac{n+2}{2n+1 \times 2n+3}x^{n+1}, \text{ inde emergent Aequationes binæ, nimirum}$$

$$2na-2nb=n, \text{ atque } 3a-b=2; \text{ erit igitur } a=\frac{3}{4}, b \text{ vero } =\frac{1}{4}; \text{ et}$$

ergo summa seriei post terminos n oritura erit $\frac{3x-1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4x2n+1}x^n$,
 quæ quidem dabitur modo $\int$ detur; pone $n=a$, tunc Series data e-
 vadet $\frac{2}{1 \times 3}x + \frac{3}{3 \times 5}xx + \frac{4}{5 \times 7}x^2 + \frac{5}{7 \times 9}x^3 \mathcal{E}c.$ at vero $\int$ hoc in casu evadit
 $= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}xx + \frac{1}{7}x^2 \mathcal{E}c. = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log. \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ erit igitur
 summa seriei datæ, $= \frac{3x-1}{8\sqrt{x}} \times \log. \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{4}.$

Proponatur Series $\frac{19}{1 \times 3 \times 5}xx + \frac{28}{2 \times 3 \times 4}x^2 + \frac{39}{3 \times 4 \times 5}x^3 + \frac{52}{4 \times 5 \times 6}x^4 \mathcal{E}c.$ quam
 summari oporteat.

Assumatur Series $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x^3 \mathcal{E}c. = f$,
 multiplicetur series assumpta per trinomium $a+bx+cx^2$, inde erit
 series genita

$$\frac{2a+3b+6c}{1 \times 2 \times 3}xx + \frac{6a+8b+12c}{2 \times 3 \times 4}x^2 + \frac{12a+15b+20c}{3 \times 4 \times 5}x^3 \mathcal{E}c.$$

$$= \frac{a+bx+cx^2}{2} \times f - \frac{1}{2}ax - \frac{b}{2}x.$$
 Fiat comparatio terminorum

seriei genitæ cum terminis seriei propositæ, hinc orientur tres Aequa-
 tiones $2a+3b+6c=19$, $6a+8b+12c=28$, $12a+15b+20c=39$,
 quarum ope invenientur $a=2$, $b=-7$, $c=6$: erit igitur summa
 desiderata $= 2-7x+6xx \times f - 2+\frac{1}{2}6x$: jam si vis ut irrationalitas
 tollatur, pone $2-7x+6xx=0$, hinc elicietur valor duplex quanti-
 tatis x , nempe $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$; quapropter si x restringatur ad valorem
 $\frac{1}{2}$, erit summa seriei $= 1$: sin vero x restringatur ad valorem
 $\frac{2}{3}$, tunc erit summa seriei $= 2$.

Eodem modo si proponatur series

$$\frac{5}{1 \times 2 \times 3}x^2 + \frac{10}{2 \times 3 \times 4}x^3 + \frac{17}{3 \times 4 \times 5}x^4 + \frac{26}{4 \times 5 \times 6}x^5 + \frac{37}{5 \times 6 \times 7}x^6 \mathcal{E}c.$$

tum assumpta seriei $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x^3 \mathcal{E}c. = f$, summa seriei

propositæ invenietur $= 1-x+xx \times f - 1 + \frac{1}{2}x$; jam si ponatur
 $1-x+xx=0$, valores quantitatis x erunt impossibiles, adeoque sum-
 ma serie propositæ in nullo casu poterit rationalis evadere.

U
 LIBER



L I B E R VII.

Responsio ad quasdam Criminationes.

C A P U T I.

ANno 1710, Liber Gallice conscriptus de Ludis, cui Titulus, *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Cl. Viro Doctissimo *Monmort* autore, evulgatus fuit; is cum fente incidisset in manus Nobilissimi Viri Domini *Franco. Robartes* quem omnes tum in humanioribus literis, tum in Mathematica versatissimum agnoverunt, hac data occasione, Viro Cl. placuit Problemata quadam ad idem argumentum spectantia, sed multo difficiliora quam illa quæ solverat Dominus *Monmort* mihi proponere; rogavitque ut si quid novi mihi occurreret quod adeo facile ex *Huygenii* methodo non fluere, id prioribus vellem adungere, principiaque exponerem in quibus eorum solutio niteretur; quæ cum satis feliciter confecissem, ea omnia Vir Cl. ad Societatem Regiam ultro desente dignatus est, eaque commendare tanquam digna quæ lucem viderent, utpote quæ complecterentur speculationem non tam ad ludos spectantem quam dirigendæ menti in exquirenda veritate intervenientem. Hinc factum fuit ut Tractatus de iis exscriptus, Titulo adhibito *De Mensura Sortis*, ex Regiæ Societatis mandato, *Actis Philosophicis* pro Mensibus Jan. Feb. Mart. 1711, interpositus fuerit.

Non eo animo Librum Domini *Monmort* inspexeram ut quidquam in eo reprehenderem: Problemata quæ uterque nostrum solvimus non ideo solveram quia ea solverat Vir Doctissimus, aut quod ea solvere non potuissem quin illius vestigiis insituissem, sed ea mihi sumpteram solvenda ob id solummodo quod proposita fuerant, non vero soluta, a *Christiano Huygenio* summo Mathematico quem ego semper colui, & ex ejus scriptis me multa profecisse libenter agnovi. Illud autem ingenue fatebor, me postquam hæc *Huygenii* Proble-

mata

max abſolveſſem, modum ſolutionis mentis cum *Memortiane* contruliſſe, quos adeo diſſimiles inter ſe deprehendi, ut ne minimum quidem ſuſpicari poterim eorum in mentem venturum me Cl. Viri ad-jumento indigniſſe. Cum vero nulla exaret cauſa cur quid de his rebus ſentirem declarare non auderem, præterire non poteram quin dicerem me eum non probare ſolutionis modum quo uſus fuerat D. *Memort*, ſed ne durus in illum videret, id protinus addideram eum *Huygeni* methodum variis Exemplis pulchre illuſtraſſe. Poſt hæc Cl. Viri nihil amplius laudis in toto libro tribueram, non quod forteſſe amplius non meruerit, ſed quod mihi aliis occupationibus diſtento ſatis erui non ſupereceret ut in id inquirerem quoviſque erat laudandus.

Adeo conſcius mihi eram me ea agendi ratione Domino *Memort* diſplicere non poſuiſſe, ut cum ad Illuſtriſſimum Abbatem *Bignonum* quem Literari omnes venerantur, librum meum miſiſſem; hanc gratiam a digniſſimo viro impetraveram ut Exemplar alterum quod ſuo adjunxeram Domino *Memort* mihi tunc ignoto reddi in ſe reciperet.

Anno 1713 Dom. *Memort* librum ſuum denuo edidit; cum vero in ſecunda Editione plura reperirentur quæ prior Editio non habuerat, eam ad me mittere curaverat, hanc comitabantur literæ quibus ſignificabat ſe in ea ſpe eſſe, me eam pluriſ facturum quam priorem feceram. In hac editione inſeruerat Epistoſolam ad Dom. *Nic. Bernoulli* qua ipſe ſententiam ſuam de libro meo exponebat; jam vero cum ea quæ ibi erant animadverſa aditum præbeant rebus quibuſdam quæ cum jucunditatem tum utilitatem lectoribus parere poſſint, non ingratum iis futurum fore exiſtimavi, ſi ea breviter recenſerem quæ in libro meo maxime animadverſione digna Vir Cl. deprehenderat.

I. Conqueritur me Problemata quedam ſolviſſe quæ ipſe ante ſolverat; id tamen fateatur, ſolutiones meas fuiſſe generaliores.

II. Affirmat Problemata quæ ego ſolveram, quæque non ſoluta erant in Libro ſuo, ſoluta tamen fuiſſe in literis quæ inter ipſum & Dom. *Nic. Bernoulli* interceſſerant, unde illud colligit D. *Bernoulli* nihil novi in libro meo reperiturum, niſi forteſſe quod modus ſolutionis quo uitor *ſapere ſit meus, ſemperque elegans & ingeniſus*.

III. Obſervat Lemma quoddam a me adhibitum quod ſibi placere falſus eſt ex libro ſuo deſumptum fuiſſe, *quanquam quidem in ejus libro non exiſteris*; ſed cum paulo poſt editum hunc librum, hoc ipſiſſimum Lemma a ſe ad Clariſſimum Virum D. *Joannem Bernoulli* miſſum fuiſſe dicat, ſatis inde apparere putat me ex eodem

dem fonte illud haussisse atque ipse hauserat, nimirum ex iis quæ habuerat in pagina 141. primæ Editionis libri sui.

IV. Faterur me ingeniose solutionem Problematis mei quinti ad Solutiones Sexti & Septimi : sed id scire cupit num Problema istud quintum potuisset alio modo solvi.

V. Dicit Methodum serierum infinitarum, quam ego ad solutionem plurimum Problematum adhibueram, sibi notam fuisse, hancque potuisse a se usurpari si libuisset, quod ut ostendat, memorat, solutionem Problematis cuiusdam a se confecti per seriem infinitam quam non summaverat : addit me si quid novi deponere voluissem, id mihi pensi dare debuisse ut hanc seriem *quam neque ullus forte mortalium summare poterat* mihi summandam sumpsissem.

VI. Me temeritatis arguit quod asseruerim Problema quoddam de sorte solvi potuisse Methodo Serierum infinitarum, cum sibi constaret id fieri non posse.

VII. Faretur me solvisse Problema quod ille non attingerat ; dicit tamen illud fere unicum fuisse quod a ipso fuerat prætermisum.

VIII. Concedit me generaliter solvisse Problema de Duratione Ludorum, cuius ipse casum unicum eumque *Simplicissimum* solverat ; sed monet se primum de hoc argumento cogitasse, addit præterea se quidem illud affirmasse, casus omnes alios utcumque compositos facile solutum iri eadem methodo quam adhibuerat ad solutionem casus supradicti ; at vero id nunc sibi compertum dicit Solutionem Problematis generalis non esse facilem, etiam si in auxilium arceffas seriem istam quæ solutioni primi casus inservierat.

IX. Miratur unde mihi exorta fuerit solutio ista præcedentis Problematis ; prosteretur se valde eam comprobare, nec dissimulat totum librum sibi placuisse : sibi gratulatur quod ipse mihi occasionem supeditaverit illum edendi ; id quidem notatu dignum existimat quod ego illic congesserim ea ipsa quæ ab ipso & D. Nic. Bernoulli in suis literis *nondum editis* tractata fuerant, at tamen Vir. Cl. id mirari desinit, dum secum reputat librum meum ad libri sui imitationem scriptum fuisse, quò factum fuit ut in eam cogitandi viam perductus fuero, quam ille primus ingressus erat ; quapropter id æquum futurum fuisse censer ut ea pro suis agnovissem quæ ipse jure sibi vendicare poterat.

Ut librum Cl. Viri accepi, ad eum scripsi me de dono suo plurimas ei agere gratias, ac faceri me sibi obstrictum quod aliqua mihi concesserat quæ mihi laudi essent, de cæteris vero quæ in me reprehenderat me non posse in ejus opinionem adduci ; ex eo tempore

potē mihi cum illo intercessit familiaritas, & alter ad alterum frequentes dedimus literas; cumque ad eum scripissē me penes me habere methodum serierum quā quādam præstare possem quæ vix methodus ulla alia attingeret, ille sic rescripsit literis datis 26. Marc. 1715. *Maxime teneor desideria videndi ex nova Editione tui Libri Methodum quā uteris ad summationem serierum de quibus mentionem facis in tuis literis; quod de eis narras multam expectationem in me gignit, interim mitto tibi series aliquot quæ quidem genere a tuis differunt, sed quæ fortasse tibi probabuntur: eas impertivi Dom. Nic. Bernoulli literis heri ad ipsum scriptis.*

Series autem quas Vir Cl. miserat ex earum genere erant quas Uniate determinatas vocavi; his adjuncta quidē erat series unica diversū generis de qua me dicturum jam antea promisi, quicquid autem de his Vir Cl. ad me misit id diligenter adsero cum principio, fine, paribus intermediis, & pagella quæque numero suo distincta.

Paucis post diebus quam hæc scripta erant, novas accepi literas datas Lutetiæ 17 Ap. 1715. quibus me certiosem faciebat se iter in Angliam facturum, sequē postero die in viam daturum, arrepta inde occasione quod sibi itineris socium adiunxisset Dom. *Abbatem Conti*; non autem ideo susceptum esse iter ut Eclipsin nobis futuram totalem videret, sed ut Viros Doctrina conspicuos ac præsertim *Newtonum* inviseret; postquam Londinum advenit, in eum omne officium meum & studium contuli, habuit me comitem, interpretem, ductorem; apud *Newtonum* aliosque doctos viros admissus est, urbaniter ab iis exceptus, tandemque Societati Regiæ annumeratus.

Ubi Lutetiam rediit, scripsit se in memoria semper habiturum tot beneficia in se collata, sequē semper paratum fore ea quo ad poterit rependere.

Ex eo tempore scribere intermissimus, occupatus erat Vir Cl. in expoliendis eis seriebus quas ad me miserat, quo eas digniores redderet quæ Typis mandarentur, ego vero parabam secundam Editionem Libri mei: vix deerat solum unicuique quominus totus liber impressus esset, cum mihi in eorum Societatis Regiæ advenienti in conspectum se dedit Liber Actorum pro Mensibus Jul. Aug. Sept. hinc titulum præ se ferens *De seriebus Infinitis Tractatus, Pars Prima, Autore Petro Raymond de Mommort, R. S. S. una cum Appendice & Additamento per Dom. Brook Taylor, R. S. Ser. Tractatum hunc insperatum, adeo tempestive editum, avide pervolvavi; sed cum perciperem vix in eo quidquam inesse præter id quod ego prius videram, si exceperis Appendicem, Additamentum, & Seriem unicam Cl. Nic.*

Ber-

Bernellis; ab ulteriore harum serierum inspectione in presenti destitui, quippe quæ ad argumentum libri mei non pertinerent.

Ut primum secunda Editio libri me in lucem exiit, eam ad D. *Monmort* misi qui de ea gratias egit.

Biennium ferme elapsum erat ex quo librum miseram, cum Vir Clarissimus quem ego valde diligebam e vita excessit, hoc quidem eò graviori dolore me affecit quod in eam speravi veneram fore ut si quæ suspensiones in animo ejus hærent, eas aliquando adimerem, ac vero non licuit ea spe diutius frui. Paulo post Viri Cl. obitum, Elogium ejus a Doctissimo & Officiosissimo viro D. *Fontenelle* contextum in lucem prodit, cum vero quadam me spectantia ibi contineantur, ea hic ponenda censeui. Verba sic leguntur,

‘ *Après le Livre de Mr. Monmort, il en parut un en Angleterre sur la même matière, intitulé de Mesfurs Sortis, il est de Mr. Moivre, fameux Geometre que la France a droit, puis qu’il est François, de revendiquer sur l’Angleterre, dailleurs fort riche; je ne dissimuleray que Mr. Monmort fut vivement piqué de cet ouvrage qui lui parut avoir été fait sur le Sien, & d’après le Sien; il est vray qu’il y étoit tout, & n’étoit ce pas assez dire-t-on, mais un Seigneur de Fief n’en quittera pas pour des louanges celui qu’il prétend lui devoir, foi & hommage des Terres qu’il tient de lui; je parle selon ses pretensions, & ne décide nullement s’il étoit Seigneur.*

Quod adeo honorificam mentionem Vir Clarissimus de me fecerit, id inter maxima beneficia semper habui; & quidem pluribus abhinc annis Cl. *Varignonum* literis rogaveram ut verbis meis virum de me tam bene meritum vellet salutare, eique meo nomine de sua erga me Benevolentia plurimas agere gratias.

Sed cum celeberrimus Elogii autor videatur in ea esse opinione D. *Monmort* id agre tulisse quod ego de eodem argumento scripsissem, ingenue fateor me multa difficultate implicari; etenim dum accurate perlustravi omnes Domini *Monmort* in librum meum animadversiones, non mihi apparet librum illum ei quidpiam molestiæ attulisse, sibi contra gratulatur se mihi occasionem prebuisse illum edendi: dicit quidem Vir Clarissimus equitatem id postulasse ut ea pro suis agnovissem quæ ipse sibi jure vendicare poterat; sed hæc verba, meo quidem judicio, nihil aliud declarant quam placidi hominis sententiam de Æquitatis norma, nec quidquam aegritudinis, nedum iræ, de injuria quaquam sibi illata innuere videntur; nec erat cur Vir clarissimus mihi succenseret, non in me positum erat ut eum laederem, sibi licebat querelas suas deferre ad judices, qui de jure Domini, de

de conditione Obsequii, de lege Clientelæ, de Laudibus pro Tributo solvendis brevi statuerent.

At tamen id negare nolum quin etsi nulla fuerit iusta causa cur Vir Cl. mihi illo tempore succenseret, nec ullibi appareat se in malam partem accepisse ea quæ de Sorte scripseram, potuerit tamen Editio nova libri mei indignationem ejus movisse, ni enim iratus fuisset, qui poterat Vir Cl. eas omnes revocare concessionem quas mihi adeo benigne largitus erat; dixerat me Problemata quadam generalius solvisse quam ea ipse solverat; istud quidem erat aliquid concedere, dixerat modum meum solutionis sæpe esse novum, at semper elegantem & ingeniosum; agnoverat me Problema quoddam solvisse quod ipsum fugerat, alia passim concedit quæ jam recensere non vacat, at vero post vulgaram secundam Editionem libri *de Sorte*, nihil quidquam mihi reliquit de possessionibus antea concessis, dixerat quidem librum *de Sorte* ad sui imitationem scriptum fuisse (*sur le Sien*) dixerat se mihi ansam præbuisse ut de eodem argumento scriberem, at postea amicis insulsurat me librum meum ad Exemplar quod mihi ob oculos posuerat scripisse, & lineam e linea expressisse (*sur le Sien & d'après le Sien*) quo factum fuit ut in omnia mea jus Domini habuerit, quæ quidem verba non poterant nisi ab indignatione proficisci.

Quid autem Virum Cl. impulerat ut erga me animum mutaret conjectura non satis affequi valeo, nisi fortasse id sit, quod cum nihil aliud a me requisisset quam ut ea pro suis agnoscere vellem quæ suæ esse contendebat, idque cum æquas postularet, tum amicitia inter nos inita necessario exigeret, non ei tamen visus fuerim huic officio satisfacisse, neque, qua erat opinione imbutus, iniquiorem quam antea deprehenderit. His accedit quod cum Vir Cl. in introductione ad secundam Editionem Libri sui, paginas totas septuaginta & amplius implevisset Methodo Differentiarum, Arte Combinatoria & Demonstratione sua Lestimatis a me primum prolatis, quod quidem sibi placere factus erat, sed sibi detractum crediderat, Methodus Differentiarum in secunda Editione Libri mei fuerit a me adhibita eadem profusus fiducia ac si in eam mihi fuisset jus cum illo commune; artem vero combinatoriam in usum meum sumptisieram, principiaque simplicissima exposuerim e quibus hujus Artis Regule derivari potuissent, tandemque Lemma meum, suppressa Demonstratione rursus in medium protulerim, ne verbo quidem unico facto de Cl. Viri jure; hæc & plura posthac memoranda Cl. Virum in me fortasse accenderant.

Quam-

Quamvis autem ex debita comparatione eorum quæ de eodem Argumento uterque nostrum scripsimus, satis colligi possit qualis sententia de Criminacionibus Cl. Viri ferenda sit, attamen cum secunda Editio mea anglico sermone conscripta fuerit, quo fit ut non adeo multi sint qui nostra cum suis conferre valeant, non alienum esse duxi præcipua quadam ex nova Editione nostra excerpere quæ cum iis quæ de eodem argumento Vir Cl. scripsit comparari possint: quod accusationes atinet quæ in primam Editionem cadunt, eas mihi postponere visum est, utpote quæ nec me valde sollicitum teneant, nec adeo mihi necesse videatur ut de iis me purgem; attamen pauca fortasse de eis attingam quibus possit Lecteris iudicium aliquatenus juvari.

C A P U T II.

De Methodo Differentiarum.

NON mihi constitutum est Historiam scribere de Ortu & Progressu Methodi Differentiarum; satis mihi fuerit animadvertere hanc Methodum summa cum perspicuitate & brevitate a Clarissimo *Newtono* in suo Principiorum Libro jam primum Anno 1687. in lucem edito expositam fuisse, hanc utique tradit Vir Præstantissimus in Lemmate 5^o Lib. 3. ubi Problema solvitur de describenda Curva generis Parabolici quæ per data quocunque puncta transeat, siue fuerint Intervalsa Ordinatarum aequalia, siue inæqualia; cum vero solutio primi casus eò recidat, ut data serie numerorum ad æqualia intervalsa positorum, assignetur in ea serie terminus quivis cujus intervallum a primo seriei termino datum sit, hanc solutionem mihi visum est huc transferre, nulla fere alia adhibita mutatione quam ea quæ oriatur a mutatis quantitatuum nominibus. Solutio autem, ut facilius ad numeros accommodetur sic poterit enunciari.

Subtrahatur terminus quisque Seriei a proximo insequenti, vocenturque termini residui primæ differentiæ; deinde subtrahatur differentia quæque prima a proxima insequenti, residuæque differentiæ vocentur differentiæ secundæ; subtrahatur itidem differentia quæque secunda a proxima insequenti, residuæque differentiæ vocentur differentiæ teritiæ, & sic deinceps; sit *a* primus seriei terminus, *d* prima primarum differentiarum, *d'* prima secundarum, *d''* prima teritiarum

rum $\mathcal{E}c.$ sit x intervallum inter primum Seriei terminum & terminum quaesitum; tum erit terminus quaesitus

$$a + \frac{x d'}{1} + \frac{x x x - 1}{1 \times 2} d'' + \frac{x x x - 1 x x - 2}{1 \times 2 \times 3} d''' + \frac{x x x - 1 x x - 2 x x - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} d'''$$

$\mathcal{E}c.$ quæ Series hoc differt a *Newtoniana* quod quantitates

$$\frac{d'''}{1 \times 2}, \frac{d'''}{1 \times 2 \times 3}, \frac{d''''}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \mathcal{E}c. \text{ hic usurpatæ ponantur a } \textit{Newtono}$$

$$d'', d''', d'''' \mathcal{E}c.$$

COROLLARIUM I.

Ex hoc *Newtoni* Lemmate id facile colligitur, terminum quemlibet Seriei datæ accurate determinatum iri, si ita acciderit ut differentiæ omnes alicujus ordinis tandem evaserint æquales.

COROLLARIUM II.

Hinc deducere licet summas terminorum quoruncunque harum Serierum; etenim hæ summæ consequuntur novam Seriem terminorum quorum differentiæ primæ sunt termini ipsi Seriei datæ, primo excepto, atque adeo nihil aliud requiritur ad summas inveniendas quam ut assignetur terminus cujus locus datus sit in Serie summatarum; sunt exempli gratia $a, b, c, d \mathcal{E}c.$ termini seriei datæ; hinc erunt $a, a+b, a+b+c, a+b+c+d \mathcal{E}c.$ termini consequentes summatarum Seriem cujus differentiæ primæ sunt $b, c, d \mathcal{E}c.$ quapropter si seponatur terminus primus Seriei datæ, dein colligantur differentiæ primæ, secundæ, tertiæ $\mathcal{E}c.$ oriatur post primum terminum, sit quæ d' prima primarum, d'' prima secundarum, d''' prima terciarum $\mathcal{E}c.$ $x+1$ numerus terminorum; tum fiet summa terminorum

$$a + x b + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} d + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d'' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} d''' \mathcal{E}c.$$

etenim est a primus terminus in Serie summatarum, in eadem Serie est b prima primarum differentiarum, d' prima secundarum, d'' prima terciarum, &c. sic porro.

Horum autem Demonstratio elici potest ex prima Propositione Methodi Differentialis Cl. *Newtoni* quæ una cum quibusdam aliis scriptis ejusdem Autoris in lucem prodierant Anno 1711, cura peritissimi Mathematici mihi quæ amicitia conjunctissimi D. *W. Jones*: hæc igitur si mihi quando contigerit in usum adjungere, facile concedetur id meo jure facere potuisse.

COROLLARIUM III.

Proprietates omnes eorum numerorum qui figurati appellantur ex superiore Lemmate sua sponte fluunt: quin etiam summæ potestatum numerorum quolibet ad intervalia aequalia positorum, & summarum summæ, & harum novæ summæ in infinitum, ope hujus Theorematis investigari poterunt; quod ut exemplis pateat, pone id requiri ut summæ numerorum naturalium ab Unitate incipientium, & ad numerum quemcunque datum pertingentium assignetur, istud ope Canonis superscripti confici poterit ad hunc modum.

Pone numeros naturales a nihilo seu Cyphra incipere, quod quidem habet aliquid commodi, nihil autem necessitatis, etenim eo pacto fiet ut operatio qua summa determinatur aliquanto contrahior evadat quam si ab Unitate inciperetur, tunc sumptis differentiis, invenietur $a=0$, $b=1$, $d'=1$, $d''=0$, proindeque summa quæ generaliter designatur per Canonem $a + xb + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{2} d'$, in hoc speciali casu evadet $x + \frac{x^2-x}{2} = \frac{x^2+x}{2} = \frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2}$; cum vero $x+1$ denotet numerum terminorum inter quos Cyphra locum obtinet, consequens est ut Cyphra adempta, numerus terminorum relictus futurus sit $=x$, erit igitur summa numerorum ab Unitate incipientium, quorumque multitudo designatur per x , $= \frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2}$.

Exponatur nunc x in generali hac summatarum expressione sigillatim per numeros naturales 1, 2, 3, 4 &c. hinc orientur numeri vulgo Triangulares appellati, seu ut quidam volunt numeri tertii ordinis, nimirum 1, 3, 6, 10, 15 &c. quorum summa nunc requiratur.

Cum statim appareat duos esse casus quibus effici possit ut expressio $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2}$ evadat aequalis nihilo, nempe cum sumitur $x=0$, vel $x=-1$, ponamus idcirco quantitatem x in expressione superscripta ordinatim exponi per numeros $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ &c. inde emergent numeri 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15 &c. qui omnes tanquam Triangulares habendi sunt, jam vero cum priores duo termini nihilo sint æquales, hinc sequitur Canonem qua summa designatur ita decurtatum iri ut is ad terminos duos ultimos restringatur, quapropter ne verbis diutius immoremur, susceperit oculis subijcere sequens Diagramma.

$$a=0$$

$$a=0$$

$$b=0$$

$$1=d$$

$$1=d''$$

$$2$$

$$3$$

$$3$$

$$6$$

$$4$$

$$10$$

erit igitur summa desiderata $= \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-1}{3} =$

$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x+1}{3}$, at vero est $x-1$ multitudo terminorum inter quos numerantur duae Cyphrae, quapropter abjectis Cyphris, multitudo terminorum reliquorum erit $x-1$, atque adeo si jam velis ut x exponat multitudinem terminorum ab Unitate incipientium, erit summa desiderata $= \frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+1}{3}$ qua generantur numeri Pyramidales seu quarti ordinis. Libet casum unum amplius addere.

Exponantur iterum x in superiore Pyramidalium expressione ordinata per numeros naturales, idque requiratur ut assignetur summa numerorum inde nascentium.

Quod ut expeditius fiat, observandum est tres esse casus quibus efficitur ut productum $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+1}{3}$ futurum sit aequale nihilo, nempe cum ita accidit ut x sit vel -2 , vel -1 , vel -0 , quapropter numeri geniti omnes 0, 0, 0, 1, 4, 10, 20 &c. tanquam Pyramidales habendi sunt, atque adeo terminus Canonis primus, secundus, itemque differentiae omnes ex hac numerorum Serie deduci poterunt, quemadmodum id fit in sequenti Diagrammate:

$$a=0$$

$$1$$

$$b=0$$

$$0=d'$$

$$0$$

$$1$$

$$1$$

$$3$$

$$1$$

$$4$$

$$10$$

$$10$$

$$20$$

$$X 2$$

$$\text{cum}$$

cum vero sit $a=0$, $b=0$, $d'=0$, $d''=1$, $d'''=1$, consequens est ut summa ex generali Canone elicitur sit

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-3}{4} \times \frac{x-2}{3} = \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x+1}{4}.$$

Insuper cum $x+1$ semper in Canone designet cum terminorum numerum quorum summa requiritur, cumque inter numeros quorum summam exhibuimus tres reperiantur Cyphrae, sequitur fore ut si excludantur Cyphrae, numerus terminorum relictus designabitur per $x-2$; quapropter si jam velis ut numerus terminorum, abjectis Cyphris, denominetur per x , palam est scribendum esse x loco $x-2$, quo fiet ut summa desiderata evasura sit $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+2}{3} \times \frac{x+3}{4}$.

Et prius dictis satis liquet, si requiratur summa terminorum ordinis cujuscvis per numerum n designati, hanc assignare licere per formulam $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{x+2}{3} \times \frac{x+3}{4} \times \frac{x+4}{5} \&c.$ ad tot factores continuatam quot sunt Unitates in n , posito x numero terminorum quorum summa requiritur.

Pone nunc id requiri ut summa quadratorum ex numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. genitorum assignetur, hanc consequi poterimus sequenti operatione,

$$a=0$$

$$-$$

$$b=1$$

$$3=d'$$

$$4 \quad 2=d''$$

$$5$$

$$9 \quad 2$$

$$7$$

$$16$$

$$\text{Summa } a+x b + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} d' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d''.$$

$$= 0 + 0 + \frac{xx-x}{2} \times 3 + \frac{x^2-3xx+2x}{6} \times 2 = \frac{2x^2+3xx-5x}{6}$$

$$= \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{2x-1}{3}; \text{ at vero est } x+1 \text{ numerus terminorum inter}$$

quos Cyphra locum obtinet, proindeque, abjecta Cyphra, erit x numerus terminorum ab Unitate incipientium, atque adeo summa quadrata-

dratorum ex numeris 1, 2, 3, 4 &c. genitorum quorumque multitudine designatur per x , erit $\frac{x}{1} \times \frac{x+1}{2} \times \frac{2x+1}{3}$.

COROLLARIUM IV.

Si detur quantitas ex pluribus partibus constata, & uterunque composita ex indeterminata x , & quantitatibus datis, qualis Ex. gratia $3x^3 + 2xx - 5x + 6$, atque in ea interpretetur x sigillatim per terminos progressionis arithmetice cujuscunque, dein, in unum colligas terminos omnes quantitatis datæ sigillatim oriundos ex unaquaque interpretatione quantitatis x , ita ut inde consiciatur series terminorum sive crescentium sive decrescientium, assignabitur in hac Serie terminus quilibet cujus intervallum a primo termino datum sit, & summa terminorum hujus Series itidem assignabitur.

Methodus quam hactenus exposui ea ipsa est qua usus fueram in Editione anglica de *Sorte*, quamque Cl. *Newton* adscripseram: attamen non desunt aliæ Methodi quibus summationem harum Series, inter quas nulla melior reperitur quam ea quæ fuit adhibita a D. *Nic. Bernoulli* in Epistola ad D. *Monmort* data 26 Feb. 1711, quam ille patruo suo D. *Job. Bernoulli* debitam refert, hanc exemplo uno vel altero explicare, gratum fore lectoribus plane confido; pone igitur id requiri ut summa quadratorum ex numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. inveniatur.

Sit x numerus terminorum, erit igitur xx expressio generalis ejus termini cujus locus in Serie quadratorum designatur per x ; assumatur expressio generalis summe $Ax^3 + Bxx + Cx$ quæ ita constructui debet ut assumpta Scala potestatum x^3, xx, x , cujus maximus index semper Unitate superet maximum indicem quantitatum quarum summa requiritur, cujusque minimus index ad Unitatem deveniat, multiplicentur partes Scelæ per Coefficientes A, B, C, D &c. quæ jam sint determinandæ: quod ut fiat, in expressione generali summe scribatur $x+1$ loco x , hinc summa evadet,

$$Ax^3 + 3Ax^2 + 3Ax + A$$

$$+ Bxx + 2Bx + B$$

$$+ Cx + C$$

e qua si prior summa subtrahatur, relinquitur

$$3Ax^2 + 3Ax + A$$

$$+ 2Bx + B$$

$$+ C$$

quæ

quæ utique æqualis erit quadrato ex $x+1$, nempe $xx+2x+1$, etenim si ex summa quadratorum quorum numerus sit $x+1$, subtrahatur summa quadratorum quorum numerus sit x , manet quadratum unicum cujus locus designatur per $x+1$: facta itaque comparatione terminorum, erit $3A=1$, seu $A=\frac{1}{3}$, $3A+2B=2$, unde $B=\frac{2-\frac{2}{3}}{2}=\frac{2-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{2}$, $A+B+C=1$, unde $C=1-A-B=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$: erit igitur summa desiderata = $\frac{2x^2+3xx+x}{6}$.

Eodem modo si requiratur summa quadratorum ex numeris $a, a+d, a+2d, a+3d$ &c. hanc itidem obtinere licebit; etenim sit x numerus terminorum; ille igitur terminus in Serie quadratorum cujus locus designatur per $x+1$, erit $aa+2adx+ddxx$, quamobrem facta comparatione terminorum, inveniatur $A=\frac{1}{3}dd, B=\frac{2d}{3}$, $C=aa-ad+\frac{1}{6}dd$, proinde summa desiderata erit $\frac{1}{3}ddx^3+\frac{1}{2}ddxx+aa-\frac{1}{6}dd$ atque eodem modo ad casus altiores procedere licet.

COROLLARIUM V.

Series qua usi sumus ad inveniendas summas quantitarum quarum differentie evadant ultimò æquales, poterit mutari in aliam nec minus elegantem nec minus commodam, immò hoc fortasse priore commodiorem, quod relatio inter se termini cupissimè in Serie assignati, & summae terminorum eò melius conspici poterit.

Ut vero facilis ad hanc Seriem pateat via, nihil magis requiritur quam ut comparentur differentie primæ singulorum ordinum, cum eorundem ordinum differentis primis, prout differentie illæ ortum suum ducunt vel a primo Seriei termino, vel a secundo; etenim sint D', D'', D''', D'''' &c. differentie primæ singulorum ordinum, quales eæ desumuntur a primo Seriei termino, itemque sint d', d'', d''', d'''' &c. differentie primæ eorundem ordinum quales eæ desumuntur a secundo; quo posito illud statim percipietur esse $d'=D'-D', d''=D''-D', d'''=D'''-D'', d''''=D''''-D'''$ &c. adeoque si in Serie qua Summae exhibentur, nimirum

$A + \frac{x}{1}b + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2}d' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3}d'' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4}d'''$
 $\mathcal{E}c.$ pro d, d'', d''' $\mathcal{E}c.$ scribantur eorum valores, atque pro b scri-
 batur $A + D$, tunc Seriem istam in hanc alteram mutatum iri

$$\frac{x+1 \times A + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2}D' + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3}D'' + \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4}D'''}{x-1 \times A + \frac{x-1}{1} \times \frac{x}{2}D' + \frac{x-1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3}D'' + \frac{x-1}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4}D'''} \mathcal{E}c.$$

$\mathcal{E}c.$ five $\frac{x+1}{1} \times A + \frac{x}{2}D' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3}D'' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{4}D'''$ $\mathcal{E}c.$
 quod patet Diagrammate hic subiecto.

$$A = A$$

$$x b = x A + x D'$$

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} d' = \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D''$$

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} d'' = \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} D'' + \mathcal{E}c.$$

sed $A + x A = x + 1 \times A$, & $x D' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D' = \frac{x+1}{2} \times \frac{x}{2} D'$, &

$$\frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} D'' + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} D'' = \frac{x+1}{1} \times \frac{x}{3} \times \frac{x-1}{3} D'' \mathcal{E}c.$$

Hinc illud deducere proclive est.

Si ex Serie qualibet data cujus termini inter se referantur secundum legem quamcunque datam, decerpantur termini quilibet dati, a primo Seriei termino ad intervalla data positi, approximatio fieri poterit ad summam terminorum omnium proximis interval-
 lis, seu unitate, inter se distantium, a primo ad ultimum; quæ approximatione eo accuratior erit quo plures termini summentur.

Exempli gratia, dentur quatuor termini E, F, G, H ; sint a, b, c , distantiae secundi, tertii, quarti a primo; tum singantur termini isti desumi ex Serie quadam terminorum sibi proximorum cujus tertiæ differentiae sint inter se æquales, atque esse D' prima primarum differentiarum, D'' prima secundarum, D''' prima tertiarum, initio omnium facto ab E ; quo conficito, tot obtinebuntur Aequationes, quot sunt termini dati, uno dempto; hæ autem sic prodibunt

$$F = E + a D' + \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} D'' + \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3} D'''$$

$$G = E + b D' + \frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} D'' + \frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} D'''$$

$$H = E + c D' + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} D'' + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} \times \frac{c-2}{3} D'''$$

Nunc ope ternarum Aequationum suprapositarum, collige singulos valores differentiarum D', D'', D''' , qui valores si pro differentis scribantur in Serie qua summa terminorum exprimitur, nempe in

$\frac{x+1 \times E - \frac{x}{2} D + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{2} D' + \frac{x}{2} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{4} D'' \&c.$ posito intervallo $x=c$, orietur expressio summæ quæsitæ ex datis terminis & datis intervallis.

Si hac ratione formentur Canones ad summas terminorum designandas, ii etiam inservire poterunt quadrandis Curvis quæ per puncta quocunque data transcant, quod ut exemplo uno ostendatur, repetatur Regula a nobis allata, in extremo Capite quarto Lib. V. quæ huc spectabat, ut ex hæc datis terminis tribus A, B, C ad intervalla æqualia positis, summa terminorum extremis interjacentium, una cum extremis assignaretur; summa autem ista, posito p intervallo inter A & B , itemque inter B & C , reperta fuerat $= \frac{2p+1}{6p} \times p + 1 \times A + C + 4p - 2 \times B$; sige nunc p esse infinitam, hinc obtinebitur Area interjacentis extremis Ordinatis A & C quæ utique sic prodibit $\frac{A+C \times p + 4Bp}{2}$, jam si vis ut intervallum inter extremas Ordinatas nominetur q , Area erit $\frac{A+C+4B}{6} q$, modus autem ille repitendi quadraturas mechanicas easdem suppeditat conclusiones quas, sua uterque methodo, seorsim invenerunt viri Doctissimi *Cotesius* & *Sterlingius*.

Ex iis quæ ex Serie *Newtoniana* fluunt, paucisque deinceps addendis, facile deducetur Methodus inveniendi summam Seriei cujusdam de qua nos dicturos jam antea promissimus; hanc non demonstratam ad me miserat D. *Momort*, ea autem continebat solutionem sequentis Problematis quod his verbis Vir Cl. proposuerat.

PROBLEMA

Invenire summam Seriei fractionum quarum Numeratores crescant juxta progressionem Seriei cujuslibet numerorum figurarum, vel generalius, numerorum differentiam constantem habentium, quarumque Denominatores constituent progressionem quamlibet Geometricam.

SOLUTIO MONOMORTIANA.

Sit $\frac{m}{1}$ ratio Denominatorum, sit a primus terminus Seriei quam Numeratores efficiunt; sint $b, c, d, e \&c.$ differentiæ primæ, secundæ,

daë, tertiae hujus Seriei, cum est summa Seriei infinite

$$\frac{m-1}{m-1} + \frac{m-1}{m-1^2} + \frac{m-1}{m-1^3} + \frac{m-1}{m-1^4} + \frac{m-1}{m-1^5} \text{ &c.}$$

Qui autem Scire cupit quomodo Series ista ab Autore fuerit demonstrata, consulat Prop. IX. Tractatus ejus de Seriebus infinitis Interim nos Methodo Autoris non adstricti, Seriem superscriptam sic demonstrare aggrediemur.

D. *Jacobus Bernoulli* investigaverat summam Seriei infinite $1+2r+3r^2+4r^3+5r^4 \text{ &c.}$ cujus Coefficientes constituunt Seriem numerorum naturalium, hancque deprehenderat æqualem quantitati

$$\frac{1}{1-r^5}.$$

II. Invenerat summam Seriei infinite $1+3r+6rr+10r^2 \text{ &c.}$ cujus Coefficientes sunt numeri Triangulares, æqualem esse quantitati

$$\frac{1}{1-r^3}.$$

III. Invenerat summam Seriei infinite $1+4r+10rr+20r^2 \text{ &c.}$ cujus Coefficientes sunt numeri Pyramidales, æqualem esse quantitati $\frac{1}{1-r^4}$, & sic deinceps.

Modus autem quo Vir Cl. has conclusiones erat affectus, cum multum habeat simplicitatis & elegantiae, cum hoc loco describere visum est.

Principium sumit a Progressione geometrica $1+r+rr+rr^2+rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.}$ cujus summa, ut vulgo notum est, æqualis est fractioni $\frac{1}{1-r}$.

$$\text{Cum igitur sit } 1+r+rr+rr^2+rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{1}{1-r}$$

$$\text{ea de causa, erit } r+rr+rr^2+rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{r}{1-r}$$

$$rr+rr^2+rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{rr}{1-r}$$

$$rr^2+rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{rr^2}{1-r}$$

$$rr^3+rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{rr^3}{1-r}$$

$$rr^4+rr^5 \text{ &c.} = \frac{rr^4}{1-r}$$

$$rr^5 \text{ &c.} = \frac{rr^5}{1-r}$$

Hinc illud deducit quod cum summa omnium Columnarum quæ ad sinistram Aequationis partem ponuntur, constituent progressionem numerorum naturalium $1+2r+3r^2+4r^3+5r^4+6r^5+7r^6 \text{ \&c.}$ Numeratores vero terminorum ad dextram positorum constituent progressionem geometricam $= \frac{1}{1-r}$, atque Denominatores horum ter-

minorum communis sit $= 1-r$, consequens sit ut summa Series $1+2r+3r^2+4r^3 \text{ \&c.}$ in infinitum continuata æquale sit fractioni $\frac{1}{1-r^2}$.

Eodem modo si sumantur Series

$$1+2r+3r^2+4r^3+5r^4+6r^5+7r^6 \text{ \&c.} = \frac{1}{1-r^2}$$

$$1r+2rr+3r^3+4r^4+5r^5+6r^6 \text{ \&c.} = \frac{r}{1-r^2}$$

$$1rr+2r^2+3r^4+4r^5+5r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^2}{1-r^2}$$

$$1r^3+2r^4+3r^5+4r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^3}{1-r^2}$$

$$1r^4+2r^5+3r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^4}{1-r^2}$$

$$1r^5+2r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^5}{1-r^2}$$

$$1r^6 \text{ \&c.} = \frac{r^6}{1-r^2}$$

perspicuum est summas Columnarum quæ ad sinistram ponuntur constituere Seriem Trigonalem, summam vero terminorum ad dextram constituere progressionem geometricam, est igitur summa Seriei trigonalis $1+3r+6rr+10r^3+15r^4+21r^5+28r^6 \text{ \&c.} = \frac{1}{1-r^3}$

eodem modo ad casus ceteros pergere licet.

Ex quibus positis, facile erit elicere Inventionem Cl. *Memort.* Etenim si statuat r denotare intervallum inter primum terminum, & terminum quemvis alium progressionis geometricæ

$1+r$

Atque hoc quidem Theorema fuerat a me summa cum laude memoratum, in Editione anglica Libri *de Sorte*, & Auctori suo nominatum adscriptum; quin etiam ut aequitatis leges omni ex parte explem, illud jam pridem a Cl. Viro acceptum ingenue agnoveram, attamen id animadvertere, mihi licere credideram, methodum hanc assequendi summas Serierum adminiculo differentiarum inter limites artificiosos contineri, eamque, utut elegantem, casum esse particularem methodi a me antea expositae de Seriebus recurrentibus.

Etenim si sumatur Series quantitarum A, B, C, D, E &c. talis ut earum unaquaeque genita sit ex quantitate qualibet algebraica ex termino uno vel pluribus constante, & utcumque constata ex quantitatibus datis & indeterminata x quam interpretatus fueris per terminos progressionis arithmeticae cujuscunque libet; tum sit ut quantitates genitae omnes ita ad antecedentes referantur, ut relationis Scala consistet ex terminis Binomii $1-1$ ad potestatem eam evecti quam designat index altissimus indeterminatae x unitate auctus, primo termino hujus potestatis resecto, mutatisque signis reliquorum: Exempli causa, si sumatur quantitas Algebraica $3xx+4x+2$, in eaque exponatur indeterminata x per terminos progressionis arithmeticae $1, 2, 3, 4, 5$ &c. hinc conficietur Series terminorum

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E$$

$9, 22, 41, 66, 97$ &c. quorum relationis Scala, propter altissimum indicem 2 invenietur attollendo Binomium $1-1$ ad Cubum, at vero Cubus ille est $1-3+3-1$; quapropter resecto primo termino, mutatisque signis reliquorum, oriatur relationis scala $3-3+1$, quo fiet ut terminus quisque, qualis v. g. D ad antecedentes tres sic referatur ut futurus sit $D=3C-3B+A$, atque eodem modo, $E=3D-3C+B$. & sic deinceps. Porro data relationis Scala, invenire licet summam progressionis $9+22r+41r^2+66r^3+97r^4$ &c. in infinitum continuatae, quod satis liquet ex iis quae habuimus in Lib. 4^o; Praeterea si Series numerorum ita sit constituta ut eorum differentiae quaedam, primae, vel secundae, vel tertiae tandem evadant inter se aequales, argumentum est hos numeros necessario originem suam ducere ab expressione quadam algebraica ejus naturae quam antea descripsi; unde perspicuum est nihil a Theoremate *Monmortiano* praestari posse quod non facile deducatur ex generaliiori Methodo relationum: sed nisi relatio terminorum ea sit quam supra exposui, frustra tentares summam serierum consequi ope Theorematis a Cl. viro allati; etenim extra limites hos artificiosos a me definitos, nunquam eveniet ut differentiae terminorum cujuscunque Seriesi possint evadere inter se aequales, attamen sive differentiae evaserint aequales, sive secus acciderit, summam consequi licebit methodo nostra.

Jam si termini omnes Seriei infinite ejus summa requirebatur, multiplicentur per r , ita ut Series quæ posita fuerat

$$A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4 + Fr^5 \text{ &c. nunc evadat}$$

$$Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5 + Fr^6 \text{ &c. tunc facto } r = \frac{1}{m}, \text{ summa}$$

Seriei oriaturæ post eum terminorum numerum quem n designat, poterit exprimi per

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{A}{m-1} + \frac{nd}{m-1} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} d^2}{m-1} + \frac{\frac{1}{6} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} d^3}{m-1} \text{ &c.} \\ & + \frac{d^2}{m-1^2} + \frac{nd^2}{m-1^2} + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} d^3}{m-1^2} \text{ &c.} \\ & + \frac{d^3}{m-1^3} + \frac{nd^3}{m-1^3} \text{ &c.} \\ & + \frac{d^4}{m-1^4} \text{ &c.} \end{aligned} \right.$$

In hac summa pone $n=0$, hinc obtinebis summam Seriei infinite oriaturæ post terminos quorum numerus nullus sit, sive, summam totius Seriei infinite incipientis a primo termino A , quæ ideo erit

$$\frac{A}{m-1} + \frac{d}{m-1^2} + \frac{d^2}{m-1^3} + \frac{d^3}{m-1^4} + \frac{d^4}{m-1^5} \text{ &c. jam sic summa Se-}$$

riei totius infinite, subtrahatur summa Seriei oriaturæ post eum terminorum numerum quem designat n indeterminate sumptus, reliqueretur summa quaesita, nimirum summa terminorum quorum numerus sit n ; jam ut forma hujus summae contrahatior evadat, pone

$$\frac{m^n-1}{m-1} = S, \frac{S-n}{m-1} = T, \frac{T-\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2}}{m-1} = V, V - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} = X,$$

&c. tunc summa quaesita redigetur ad

$$\frac{1}{m^n} \times \left\{ \frac{m^n-1}{m-1} A + \frac{S-n}{m-1} d + \frac{T-\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2}}{m-1} d^2 + \frac{V-\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}}{m-1} d^3 \right.$$

&c.

De hac Serie autem non alienum erit observare eam inventam fuisse a D. Nic. Bernoulli atque ab eo sine demonstratione missam ad D. Moirant qui eam mirifice laudibus extulerat, nec immeri-

to; sed cum primus ejus terminus qualis a Cl. Viro afferur gravi
præli lapsu labores, etenim loco fractionis $\frac{m^2-1}{m-1}$ scriptum erat $\frac{m-1}{m-1}$,

hinc factum fuit ut hæc Series nullo modo ponerit intelligi nisi ab iis
qui eam suo Marte investigare poterant; quapropter Viros Clarissimos
orandos censeo qui rem Mathematicam pulchris suis inventis ador-
nant, ut si quam solutionem ii dederint symbolis maxime referam, ea-
dem opera dignentur eam juvare sermone vulgari, nec verbis par-
cant, ut quantum fieri possit, Verba & Symbola sibi mutuam lucem
affundere valeant.

His subungere visum est Seriem valde coneinam quæ tanquam
Corollarium ex Serie superius alia, vel ex Methodo nostra Serie-
rum recurrentiam, vel ex Methodo D. Jac. Bernoulli, vel ex Metho-
do Fluxionum facile deducitur; hæc autem eò spectat ut assignetur
summa terminorum quolibet Seriei emergentis ex divisione Unitatis
per potestatem $1-r^p$, cum ita accidit ut p sit numerus integer; sit
igitur n numerus ille quæ designatur multiplicando terminorum quorum
summa requiritur, tunc exhibebitur summa quæsitæ per Fractionem

$$\frac{1-r^n-mr^n \times 1-r-\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^n \times 1-r^2-\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} r^n \times 1-r^3}{1-r^p} \quad Ec.$$

cujus Numerator ad tot terminos continuatur quot sunt Unitates in
 $p+1$; vel per Fractiones

$$\frac{1-r^n}{1-r^p} - \frac{nr^n}{1-r^p-1} - \frac{\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} r^n}{1-r^p-2} - \frac{\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} r^n}{1-r^p-3} \quad Ec. \text{ quarum}$$

multitudo designatur per p .

Hanc autem Seriem sub alia forma prolata jampridem invenerat
D. Nic. Bernoulli, eadem methode dissolutionum quæ usus fuerat pa-
trius ejus D. Jac. Bernoulli; circa quam observat Vir Cl. rem max-
ime notatu dignam, hanc scilicet, quod si faciat $r=1$, quo fit ut
Denominatores evadant nihilo aequales, poterit tamen hoc in casu
summa Seriei assignari.

Sumit ille in Exemplum Seriem $1+3r+6rr+10r^3+15r^4$ Ec. ad
tot terminos continuatam quot sunt unitates in n , cujus summam
sub hac forma exhibet, nimirum

$$\frac{2-m+3n+2 \times r^n}{2-6r+6rr-2r^3} + \frac{2mn+4n \times r^{n+1}}{m+n \times r^{n+2}}.$$

tum

tum ex Regula tradita a D. Johanne Bernoulli quam in Tractatu Cl. Hospitalii *de infinitæ parvis* pag. 145. videre est, dividit Fluxionem, seu ut loquitur, Differentiam Numeratoris per Differentiam Denominatoris, atque post eandem operationem ter repetitam, devenit tandem ad expressionem $\frac{n^3+3mn+2n}{6}$, seu $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ qua summa designatur.

Quamquam vero Regula Cl. viri sit optima, primaque, quod sciam, quæ ad hanc rem tradita fuerit; attamen in casu proposito, eandem conclusionem aliquanto expeditius obtinere licebit ponendo $1-r=z$: etenim eo pacto, expressio summe evadit

$$\frac{1-1-z^n}{1-1-z} = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-z^n}{1-z} \times \frac{1-z}{1-z} = \frac{1-z^n}{1-z} \times \frac{1-z}{1-z}, \text{ jam si loco potestatis}$$

$$1-z^n, \text{ scribatur ejus valor } 1-nz + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} z^2 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} z^3$$

&c. tum illico comperietur fractionem superscriptam mutatum iri in

$$\text{hanc alteram } \frac{1}{z^3} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} z^3 + \frac{n-1 \times n \times n-1 \times n+2}{8} z^4 \quad \&c. \text{ seu}$$

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} + \frac{n-1 \times n \times n-1 \times n+2}{8} z \quad \&c. \text{ sed termini omnes post}$$

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \text{ multiplicantur per } z, \text{ hoc est per nihilum, adeoque}$$

omnes evanescunt, quapropter relinquetur summa desiderata =

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \text{ \& sic de cæteris.}$$

De Serie oriunda ex divisione Unitatis per potestatem $1-r^p$ illud etiam observari poterit: si sumantur termini omnes locorum imparium, itemque termini omnes locorum parium, Series infinita ex terminis locorum imparium confecta, eam rationem habebit ad Seriem confectam ex terminis locorum parium quæ est summe $1+r^p-1-r^p$, quod ut ostendatur;

in expressione $\frac{1}{1-r^p}$ pone $1-r^p=0$ atque $rr=z$, erit igitur

$$1-\sqrt{z^p}=0; \text{ hinc } \sqrt{z}=1, \text{ seu } z=1, \text{ proinde } 1-rr=0; \text{ divide}$$

$$1-rr. \text{ per } 1-r, \text{ quotiens erit } 1+rr, \text{ quapropter } \frac{1-rr^p}{1-r} = 1+rr^p,$$

adeo-

adeoque Series locorum imparium, erit ad Series locorum parium uti in ea ratione quam habet summa locorum imparium, in potestate expansi Binomii $1 + r$, ad summam locorum parium in eadem potestate; sed hæc summe, ut notum est, eam rationem inter se habent quæ est summa $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ ad differentiam r , quæ est $1 + r - r^2 - r^3 + \dots$ ergo constat Propositio.

COROLLARIUM.

Si ponatur $r = 1$, summa infinita prioris Series, erit ad summam infinitam posterioris in ratione equalitatis, nec tamen ideo sequitur differentiam harum Seriesum futuram fore nullam, (si exceptis casum illud unicuique quo p relinquitur ad unitatem) imò differentia erit infinitè magna, & eam habebit infinitatis gradum quem denotat $p - 1$; Ex. grata, si sumatur Progressio arithmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. quæ dividatur in binas Series 1, 3, 5, 7 &c. 2, 4, 6, 8 &c. in quarum utraque multiplicando terminorum sit n , palam est harum differentiam esse $= n$, si nunc n esse infinitam, differentia igitur erit infinitè magna, & habebit simplicem infinitis gradum, ac si sumatur Series Trigonalium, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 &c. quæ dividatur in binas alteras, 1, 6, 15, 28 &c. 3, 10, 21, 36 &c. harum differentia erit $n(n-1)$, facta ut prius n multitudine terminorum, pone nunc n esse infinitam, hinc fiet ut differentia Serierum habitura sit duplicatum infinitatis gradum, eademque est ratio de cæteris.

Si Series quilibet numerorum Ordinis cuiuscunque, siue Trigonalium siue Pyramidalium &c. dividatur in Series trinas quæ sigillatim constituentur ex quatuor quibusque terminis Series datæ, initio cuiusque novæ Series ordinatim factò a primo, secundo, tertio Seriei datæ termino, Series illæ novæ erunt inter se in ratione equalitatis, cuius demonstratio hinc desumi potest, quod si Trinomium $1 + r + r^2$, ad potestatem quamlibet accollatur, tres summe ex quatuor quibusque terminis oriuntur erunt inter se æquales, modo r restringatur ad Unitatem, eadem vero analogia in infinitum usque porrigitur.

Hæc sunt fere omnia, quæ de hac Methodo Differentiarum dicere constitueram; hoc tamen monendum censeo, nisi in ea tractanda maxima cautio aut singularis solertia adhibeatur, totum illud quod hac via consequaris ad conclusiones parum utiles redactum iri, etc.

Z

nim

nim cum ultima illæ differentiz, quæ ponuntur esse inter se sequentes, vel ad æqualitatem proximæ accedere, a principio Seriei sunt valde remote, necesse erit ut Series vulgari differentiarum Methodo comparata vel ad terminos adeo multos producatut ut labor inde otiosus vix fieri possit, vel quod peius est, ut termini Seriei magis magisque a veritate aberrent: hinc autem incommode remedium invenit eximius Mathematicus D. *Jac. Stirling* qui Methodum excogitavit brevi in vulgus exituram qua quidquid difficultatis in hac re occurrit omnino resecat; hoc vero donec fiat, non injucundum Lectori fore credidi si ei impertirem solutionem elegantissimam quam Vir Cl. Methodo Differentiarum consequutus est de inveniendâ in Binomio permagno rationem mediz Coefficientis ad summam Coefficientium omnium; hanc Solutionem ut primam mecum communicavi, eum rogavi ut faceret me eam publici juris facere, cui ille commiter assensus est, & eam aliquanto fufius exponere libenter suscepit, quod fecit Epistola quam hic subijcio.

QUæstionum circiter abhinc, *vir Cl.* cum significatam D. *Alex. Cuning* Problemata de Interpolatione & Summatione Serierum atque ejus generis quæ sub Analysis vulgo recepta non cadunt, solvi posse per Methodum Differentialem *Newtoni*; respondit Illustrissimus vir se dubitare an Problema a Te aliquot ante annos solutum de inveniendâ Unciæ media in quavis dignitate Binonii solvi posset per Differentias. Ego dein curiositate inductus, & confidens me viro de Marbæi bene merito gratum facturum, idem libenter aggregissum: & facor ortas esse difficultates quæ impedire quominus ad optatam conclusionem confectum pervenire poterim, sed laboris haud piget, siquidem tandem asectus sum solutionem adeo tibi probatam ut digneris eam propriis tuis scriptis inferere. Ea vero sic se habet.

Si Index Dignitatis sit numerus par, appelletur n ; vel si sit impar, vocetur $n-1$; erique ut Unciæ media ad summam omnium ejusdem Dignitatis, ita unitas ad medium proportionale inter semicircumferentiam Circuli & Seriem sequentem

$$n + \frac{1}{2 \times n+1} + \frac{9}{4 \times n+4} + \frac{25}{6 \times n+6} + \frac{49}{8 \times n+8} + \frac{81}{10 \times n+10} \text{ &c.}$$

Exempli gratia, si quaeratur ratio Unciæ mediz ad summam omnium in Dignitate centesima vel nonagesima nona, erit $n=100$, qui ductus

Circuli potuerit in eam induci; semel atque iterum, ac sepius tentavi an solutio ejusdem Problematis a me confecta quidquam adjumenti mihi afferre posset quo mihi conjicere liceret quid circulus eum ea haberet commune, sed frustra; cum vero aliquandiu perplexus haessem qua via id possem consequi, cumque scirem fundamentum investigationis Cl. Viri illud fuisse ut consideraret quo pacto rationes mediae aliae ex aliis generentur, invenerat utique rationem mediam in quadrato esse $\frac{1}{2}$, in biquadrato $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, in sexta potestate $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}$, in octava $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8}$, &c sic de caeteris; dum inquam haec animo revolvebam, incidi fortuito in Epistolam Wallisi ad Leibnitium in qua haec verba leguntur.

Ubi dicitur Nicolai Mercatorum primum esse qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem infinitam, vide annon mea talis sit, Arithm. Inf. Prop. 191. $\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12}$

Hos numeros ut aspexi, illico confugi ad Arithmeticam Infinitorum Wallisi, e qua haec excepi

$$\square < \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\square > \frac{3 \times 3}{2 \times 4} \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\square < \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1 - \frac{1}{5}}$$

$$\square > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6} \sqrt{1 - \frac{1}{6}}$$

$$\square < \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8} \sqrt{1 - \frac{1}{7}}$$

$$\square > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8} \sqrt{1 - \frac{1}{8}}$$

Sc.

Ubi Nota $\square$ usurpatur ad designandam rationem quadrati ad Circulum in eo inscripti, quae idcirco mutari potest in $\frac{1}{2}$, facta ratione diametri ad circumferentiam ut 1 ad c .

Cum vero perciperem Radicalitates perpetuo minui, facile comperi eas omnino posse anneri; hinc superiores conclusiones in has alteras mutavi

$\frac{4}{e} < \frac{3}{2}$, etenim quod minus est minori, minus est majori.

$\frac{4}{e} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$, atque quod majus est majori, majus est minori.

$$\frac{4}{e} < \frac{3 \times 3 \times}{2 \times 4 \times 4}$$

$$\frac{4}{e} > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 4 \times 4 \times 6}$$

Ec.

Itaque assumptis ad libitum binis limitibus

$$\frac{4}{e} < \frac{3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12}$$

$$\frac{4}{e} > \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times 11 \times 11 \times 13 \times 13}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times 10 \times 12 \times 12 \times 14}$$

ex primo limite, per extractionem Radicis quadratæ, illud deduxi $\frac{2}{\sqrt{e}} < \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times \sqrt{13}}{\sqrt{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}}$, adeoque $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} < \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \sqrt{13}$, pro-

inde si numerus factorum ponatur esse = p , tunc erit

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} < \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \sqrt{2p+1}$; pone $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = A$, & $2p=n$; hinc fiet ut $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \sqrt{e}$, hoc est media ratio, in potestate designata

per n , major futura sit quam quantitas $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ five major quam

$$\frac{1}{n+1} \sqrt{n+1}.$$

Eadem procedendi via, ex secundo limite illud deducetur, medianam rationem in potestate designata per n , minorem futuram fore quam quantitas $\frac{1}{n+1} \sqrt{n+2}$.

Quamquam vero hæ conclusiones minime aperiant viam qua vir supra laudatus ad solutionem suam pervenerit, nec limites a nobis definiti ad veros numeros tam prope accedant quam solutiones ejus contractiores, attamen hoc fortasse placebit, quod semper eandem ope cognoscere possis eorum solutio supra veram infrane consistat. Has autem attuli, non quod de eis ipse mihi quidquam suam, sed quod vir mei amantissimus mihi suavit ut eas edere.

Præquam hunc locum omnino relinquamus, non inutile erit exponere Methodum qua quantitates D , D' , D'' , ex æquationibus in Coroll. V. adhibitis satis commode expelli possint, si ita accidat ut termini E , F , G , H , ad equalia intervalla constituentur; pone igitur intervallum b duplum esse intervalli a , atque c ejusdem esse exemplum; sit $F-E=d'$, $G-2F+E=d''$, $H-3G+3F-E=d'''$,
sunt

sunt præterea termini x, y, z , suo quique ordine distantes a primo E intervallis $v, 2v, 3v$; quibus positis, erant

$$x = E + \frac{v}{1}d' + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2}d'' + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times \frac{v-2}{3}d'''.$$

$$y = E + \frac{2v}{1}d' + \frac{2v}{1} \times \frac{2v-1}{2}d'' + \frac{2v}{1} \times \frac{2v-1}{2} \times \frac{2v-2}{3}d'''.$$

$$z = E + \frac{3v}{1}d' + \frac{3v}{1} \times \frac{3v-1}{2}d'' + \frac{3v}{1} \times \frac{3v-1}{2} \times \frac{3v-2}{3}d'''.$$

hinc illud deducetur

$$x - E = v d' + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} d'' + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times \frac{v-2}{3} d'''.$$

$$y - 2x + E =$$

$$v v d' + v v \times v - 1 d''$$

Finge nunc v esse $= \frac{1}{2}$ erit igitur $1^o x - E = D'$; $2^o y - 2x + E = D'$; $3^o z - 3y + 3x - E = D''$. proinde

$$D' = \frac{d'}{a} + \frac{1-a}{2aa} d'' + \frac{1-a \times 2-a}{2 \times 3a^3} d'''.$$

$$D'' = \frac{d'}{aa} + \frac{1-a}{a^3} d'''.$$

$$D''' = \frac{d'''}{a^3}.$$

si vero quinque termini E, F, G, H, K , darentur, ad valores quantitatum D, D'', D''' ordinem adfici deberent

$$\frac{1-a}{2} \times \frac{1-2a}{3} \times \frac{1-3a}{4a^3} d''', \quad \frac{1-a}{3} \times \frac{1-11a}{4a^4} d''', \quad \frac{1-a \times 3}{2a^4} d'''; \text{ quod}$$

attinet valorem quantitatis D''' , is invenitur esse $= \frac{d'''}{a^4}$.

Hinc si dentur quatuor termini E, F, G, H ad equalia intervalla positi, atque statuaturs esse a intervallum inter binos quosque terminos sibi proximos, deinde fingantur intervalla illa repleti terminis quorum quilibet unitate a proximo distet, quorumque tertiae differentiae sunt inter se aequales, tunc summa omnium erit

$$\frac{3a+1}{8a} \times E + H \times a + 1 + G + K \times 3a - 1.$$

CAPUT III.

De Methodo Combinationum.

CL. *Monneri* eas nobis tradidit Combinationum Regulas quas ab aliis acceperat; ad quarum demonstrationem illis eo principio usus est quo ad rem eandem longe ante eum usi fuerant viri doctissimi *Pascalis* & *Wallisus*: Si autem ille clarius quam ii necessariam connexionem inter principia assumpta & conclusiones inde derivatas evicerit, aut maiorem vim demonstrationibus suis attulerit, vel brevius hanc doctrinam exposuerit, vel generaliores conclusiones ex principiis positis eluciverit, id ei laudi adscribi æquum est.

In secunda Editione *Libri de Sorte*, *Quæstiones de Combinationibus* tanquam Problemata ad Ludos Spectantia mihi solvenda proposueram; ad eorum autem solutionem eo principio ipsique gradibus ita deductus fueram, ut non modo Regulas Combinationum vulgo notas demonstrare potuerim, sed ut mihi aditus patuerit ad eas quæstiones solvendas quæ vulgari Combinationum Methodo non facile subiciantur.

Modus autem quo *Regulæ Combinationum* a me fuerant demonstratæ, ralis erat.

Si sint Collutores aliquot quorum numerus sit s , & possit eorum unusquisque æque facile expectare ut cæteros omnes vincat, & Probabilitas quàm habet eorum unus quem quis designare voluerit, ut cæteros vincat, denotetur per fractionem $\frac{1}{s}$; tum probabilitas ut alteruter ex duobus inter omnes speciatim designatis reliquos omnes vincat, denotari debet per fractionem $\frac{2}{s}$; etenim duplo probabilius est ut alteruter ex duobus victor evadat quàm eorum unus speciatim designatus, & Probabilitas ut Collusorem aliquis non quidem designatus, sed in ea multitudine inclusus quam designet numerus P , reliquos omnes vincat, denotari debet pro fractionem $\frac{P}{s}$.

Si summa tota deposita inter Collutores omnes sit z , expectatio singulorum, hoc est jus quod singuli habent in summam depositam aestimari debet per fractionem $\frac{z}{s}$, etenim jus commune omnium est z , sed unusquisque eorum eandem habet partem juris istius communis,

munis, cum ex Hypothesi omnes aequa Sorte contendant, adeoque expectatio singulorum est $\frac{1}{2}$, seu $\frac{1}{2}a$.

Hæc confirmari poterunt alia ratione ad hunc modum; Cum numerus Collusorum sit s , & depositum totum sit a , sequitur singulos deposuisse summam $\frac{a}{s}$, sed èd quod Collusor aliquis dudo se obtinuerit, nihil inde lucri percipit, nihil damni patitur; etenim si quid tale ei obveniret, in alios id redundare necesse foret, quod est contra Hypothesin, si quidem omnes aequa Sorte contendunt, adeoque si obligationis suæ eorum quemvis peniteat, & is vellet expectationem suam vendere, æquum est ut pro ea recipiat summam $\frac{a}{s}$, eandem utique quam deposuerat, sed id quod quisque jussu recipit est valor Expectationis suæ, adeoque Expectatio singulorum est $\frac{a}{s}$.

Si Spectator aliquis emat Expectationes plurimum Collusorum quorum numerus designetur per p , ita ut quicquid cuilibet eorum Sorte obtigerit in se transferatur vellet, æquum est ut singulis pendat summam $\frac{a}{p}$, adeoque universis summam $\frac{p}{p}a$, quæ proinde evadit illius expectatio.

Hanc igitur generalem conclusionem nobis deducere licet, cujusque Expectationem esse in ratione composita ex summa quam quisque sit obtenturus si vicerit, & ex Probabilitate eam obtinendi.

Si duo sint eventus tales ut Probabilitas contingentiae eorum alterutrius quem priorem appellare licet, designetur per $\frac{1}{2}$, Probabilitas vero ut posterior contingat, cum prior contigerit, designetur per $\frac{1}{2}$, & ego proemio aliquo a sim donandus, modo eventus uterque contingat; expectatio mea assignanda erit ex multiplicatione earum fractionum quibus Probabilitates designantur, & ejus summa quam sim obtenturus si eventus uterque contigerit; quæ propter expectatio mea recte exprimitur per quantitatem $\frac{1}{4}a$.

Etenim pone eventum illum contigisse cujus Probabilitas designatur per $\frac{1}{2}$, hoc mihi quidem in commodum cedit, nondum tamen jus habeo in summam totam a , sed in eam tantummodo partem quæ de-

per $\frac{1}{f}$, ita ut si velim pacisci cum aliquo qui reliquam Sortis mee partem in se recipiat, aequum est ut is mihi det in manum summam $\frac{1}{f}a$. Eventus ille igitur ejus Probabilitas designatur per $\frac{1}{f}$, si contigerit, nihilo plus mihi juris tribuit quam ut obineam summam $\frac{1}{f}a$; potest itaque spectari summa $\frac{1}{f}a$, tanquam proemium mihi concedendum, modo eventus prius contigerit, sed Probabilitas ejus contingentiae est $\frac{1}{f}$, adeoque expectatio mea priusquam de eventibus quidquam sit compertum, aestimanda est ex quantitate $\frac{1}{f} \times \frac{1}{f}a$.

Potsumus itaque hoc ponere fundamentum quo nititur omnis fere Doctrina de eventibus a Sorte pendentibus, nimirum Probabilitatem contingentiae duorum eventuum compositam esse ex Probabilitate ut eorum unus contingat, & ex Probabilitate ut alter contingat, cum prior contigerit, hoc est, cum prior spectatus fuerit tanquam si contigisset.

Et eadem ratione, Probabilitas contingentiae trium vel plurium eventuum composita est ex Probabilitate ut primus contingat, & ex Probabilitate ut secundus contingat cum primus contigerit, & ex Probabilitate ut tertius contingat, cum primus & secundus contigerint, & sic in infinitum.

Quibus positis, facilis erit accessus ad Solutiones Problematum quae Combinationis spectant.

PROBLEMA I.

Data multitudine n, rerum a, b, c, d &c. in acervum promisce congestarum; invenire Probabilitatem ut si quis binas ex acervo indiscriminatim eduxerit, eas futuras sint a & b spectatim designatae.

SOLUTIO.

Utrum res sumendae simul aut separatim ex acervo educantur, nihil inde mutationis in Probabilitatem eventus inducetur; Probabilitas aucta ut a vel b primo tractu ex acervo educatur, ex superius dictis erit $\frac{2}{n}$, pone utramlibet educam fuisse v . g. a ; multitudo igitur rerum reliquarum erit $n-1$, proinde Probabilitas ut b nunc educatur erit

erit $\frac{1}{n-1}$; Probabilitas igitur ut amba educantur sive simul sive per vices erit $= \frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1}$.

COROLLARIUM.

Sic S numerus varietatum seu Combinationum quibus res binas quascunque in data multitudine n assumere liceat, erit igitur Probabilitas ut utraque assumatur $= \frac{1}{2}$, sed id demonstratum fuit hanc Probabilitatem esse $\frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1}$, erit igitur $S = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

PROBLEMA II.

Isdem positis ac supra, invenire Probabilitatem ut si ex acervo ternæ extirantur, ea futura sint a, b, c speciatim designatæ.

SOLUTIO.

Probabilitas ut a vel b vel c primo tractu educantur est $\frac{3}{n}$, pone a educam fuisse, multitudo igitur rerum reliquarum erit $n-1$, adeoque Probabilitas ut b vel c secundo tractu educatur est $\frac{2}{n-1}$, erit igitur multitudo rerum reliquarum $= n-2$, proindeque Probabilitas ut c nunc educatur erit $\frac{1}{n-2}$, quamobrem Probabilitas ut a, b, c omnes educantur, sive simul, sive per vices, nulla habita ratione ordinis, erit $\frac{3}{n} \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$.

COROLLARIUM I.

Sit T numerus varietatum seu Combinationum quibus res trinas quascunque in multitudine data n assumere licet; erit igitur Probabilitas ut a, b, c assumantur $= \frac{1}{T}$, sed hæc Probabilitas demonstrata fuit æqualis quantitati $\frac{3}{n} \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$ erit igitur $T = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

COROLLARIUM II.

Numerus varietatum seu Combinationum quibus multitudo p rerum in majore multitudine n eligi possit, aequalis erit Fractioni $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ &c. quæ ex tot factoribus constat quot sunt Unitates in p .

Cl. *Pascalius* in Libro suo qui inscribitur *de Triangulo Arithmetico* Anno 1665. in lucem emissio, numerorum figuratorum proprietates demonstravit, ostenditque Combinationes rerum juxta multitudinem quamvis datam summandarum, illic contineri; conclusiones autem quas vir Doctissimus e sua Theoria deduxerat, mutatis quibusdam verbis, at servato sensu, sic possunt exprimi.

PROBLEMA PASCALIANUM I.

Datis duobus numeris inaequalibus, invenire in Triangulo Arithmetico, quot modis minor in majore contineatur.

SOLUTIO.

Sic n major datorum, p minor; tum in eo Ordine cujus Exponentis est $p-1$, summe numerum ejus *Radix* est $n-p+1$; numerus ille quaesito satisfaciet.

N. B. Verbum *Radix* hoc loco usurpatum denotat locum illum quem quisque figuratus numerus in Ordine suo occupat.

PROBLEMA PASCALIANUM II.

Datis numeri cujuslibet Radice & Exponente Ordinis, componere numerum.

SOLUTIO.

Productus numerorum qui precedunt exponentum Ordinis dividat Productum numerorum continuentium quorum primus sit *Radix*, Quotiens est quaesitus.

Ut vero hæ Regulæ a *Pascalis* allatæ ad casum aliquem particularem applicentur, pone id requiri ut inveniatnr numerus Combinationum quo res binæ sumuntur in multitudine data n .

Cum

Cum sit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus designatur per $n-1$ quæsto satisfaciet; quapropter si fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæstus septimus Triangularis, & sic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæstus æqualis sit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perspicuum est Denominatorem hoc in casu fore 1×2 , cumque Numerator ejusdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus sit Radix, patet Numeratorem esse $\frac{n-1}{1} \times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum sit $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ seu $\frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2}$; atque eodem modo si sit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & sic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Pascali* positis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico suo D. *Garnier* acceperat qui eam fortasse ex principiis aliunde petitis ellocuerat, (vide *Pascalii* Tractatum qui *Combinationes* inscribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	
Ordo 1 ^{us}	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	
2 ^{us}	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,		
3 ^{us}	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,			
4 ^{us}	1,	4,	10,	20,	35,	56,				
5 ^{us}	1,	5,	15,	35,	70,					
6 ^{us}	1,	6,	21,	56,						
7 ^{us}	1,	7,	28,							
8 ^{us}	1,	8,								
9 ^{us}	1,									

C A P U T IV.

De Permutationibus.

P R O B L E M A I.

Data multitudine n literarum a, b, c, d, e , &c. quæ tum inter se sunt omnes dissimiles, tum promiscue scriptæ; invenire Probabilitatem ut a primum locum occupet, b secundum.

S O L U T I O.

Cum numerus literarum omnium sit n , Probabilitas ut a primum locum occupet erit $\frac{1}{n}$; pone nunc a primum locum occupasse, numerus igitur literarum reliquarum erit $n-1$, adeoque Probabilitas ut b proximum locum occupet erit $\frac{1}{n-1}$: Probabilitas igitur ut a primum locum occupet, b secundum, erit $\frac{1}{n \times n-1}$.

C O R O L L A R I U M I.

Sit S numerus ordinum seu permutationum quas literæ n binæ sumptæ subire possint, ita ut positio ab ordinem unum constituat, ba alterum; Probabilitas igitur ut a in Serie literarum omnium primum locum occupet, b vero secundum, erit $\frac{1}{2}$: sed ea Probabilitas demonstrata fuit æqualis fractioni $\frac{1}{n \times n-1}$, est igitur $S = n \times n-1$.

C O R O L L A R I U M II.

Atque eodem ratiocinandi modo, concludere licet numerum permutationum quas literæ n ita simul junctæ ut multitudine junctarum aequet numerum p , subire possint, æqualem esse quantitati $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{p}$ &c. ad tot factores continuatæ quot sunt Unitates in p .

PROBLEMA II.

Data multitudine litterarum aabbccccc quatuor aliquæ singularem specierum possunt esse inter se similes, invenire Probabilitatem ut si promiscue scribantur, ea datum ordinem sint consequutura; sit ordo datus idem qui superscriptus est.

SOLUTIO.

Probabilitas ut ex binis literis *aa* ejusdem speciei earum alterutra primum locum occupet, erit $\frac{2}{9}$; quo posito, Probabilitas ut altera *a* secundum locum occupet, erit $\frac{1}{8}$; quo etiam posito, Probabilitas ut externalis literis *bbb* ejusdem speciei earum aliqua tertium locum occupet, erit $\frac{3}{7}$; hoc itidem posito, Probabilitas ut ex binis reliquis *bb* ejusdem speciei earum alterutra quartum locum occupet, erit $\frac{2}{6}$; quo posito, Probabilitas ut tertia residua *b* quintum locum occupet, erit $\frac{1}{5}$; quo posito, necessario eveniet ut reliquæ unius speciei litteræ reliquas sedes sint occupaturæ, cujus Probabilitas seu potius Certitudo designari oportet scribendo Unitatem: Probabilitas igitur ut datus Ordo servetur erit $\frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1260}$.

COROLLARIUM I.

Numerus permutationum seu variarum positionum, seu mutationum ordinis quas litteræ *aabbccccc* simul sumptæ recipere possint denotabitur per fractiones $\frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{1} = 1260$.

COROLLARIUM II.

Si data multitudine *n* rerum speciei dissimilium talis sit ut prima species tot contineat individuas quot *p* continet Unitates, secunda quot *q*, tertia quot *r*, quarta quot *s* &c. numerus permutationum quas multitudo data subire possit, designabitur per fractionem cujus Numerator $n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3$ &c. tot contineat factores quot Sum-

Summa $p+q+r$ seu $n-s$ continet Unitates, cuiusque Denominator sit productus ex variis seriebus $p \times p-1 \times p-2$ &c. $q \times q-1 \times q-2$ &c. $r \times r-1 \times r-2$ &c. quarum prima tot factores contineat quot sunt Unitates in p , secunda quot in q , tertia quot in r &c.

PROBLEMA III.

Si Collatores aliquot quorum dexteritates in Globis mitendis sunt proportionales quantitativis datis, singulis Globis certent; invenire Probabilitatem ut Globi ordinem datum inter se servent.

SOLUTIO.

Sint Globi insigniti notis A, B, C, D ; sit sordo datus idem qui suprascriptus est; sint dexteritates proportionales quantitativis a, b, c, d ; his positis, Probabilitas ut Globus A propius ad metam accedat quam ullus reliquorum erit $\frac{a}{a+b+c+d}$, finge id contigisse, tunc Probabilitas ut B proximum locum assequatur erit $\frac{b}{b+c+d}$, fac etiam id evenisse, Probabilitas igitur ut C locum deinceps proximum obtineat erit $\frac{c}{c+d}$, quo etiam posito, Probabilitas ut D in ultimo loco hæreat fiet certitudo, ergo Probabilitas ut datus ordo servetur erit

$$\frac{a}{a+b+c+d} \times \frac{b}{b+c+d} \times \frac{c}{c+d} \times \frac{d}{d}.$$

CAPUT V.

Combinations & Permutationes ulterius considerate.

DEFINITIO.

Locus literæ est sedes illa quam in Serie naturali literarum unaquæque earum occupat, sic locus literæ a est 1, locus literæ b est 2, & sic de cæteris.

PROBLEMA.

Data multitudine quacunque Literarum a, b, c, d, e, f &c. quæ omnes sunt tum inter se dissimiles, tum indiscriminatim locata, invenire Probabilitatem ut earum aliquæ in locis suis repariantur, aliæ vero a locis suis disjungantur.

SOLUTIO.

Sit n numerus Literarum omnium, p numerus earum quæ in locis suis ponantur, q numerus earum quæ a locis suis separentur, $n-p-q$ numerus earum de quibus non præscriptum sit utrum eæ futuræ sint in locis suis, an ab iis abfuturæ: pone, compendii causa,

$$\frac{1}{p} = r, \frac{1}{n-p-1} = s, \frac{1}{n-p-1 \times n-2} = t, \frac{1}{n \times n-1 \times n-2 \times n-3} = v, \text{ \&c.}$$

tunc si sit $p=q$, hoc est si nulla literarum proprium suum locum sit occupatura, sume quantitates omnes $1-r+s-t+v$ &c. quæ afficiantur signis alternatim affirmativis & negativis; sin sit $p=1$, omite primam quantitatem 1, & sume $r-s+t-v$ &c. eodem modo si sit $p=2$, omite primas binas, & sume $s-t+v$ &c. hoc semper observato ut prima residuarum afficiatur signo affirmativo; his paratis, quantitatibus singulis residuis præfige ordinatim Coefficientes Binomiali ad eam potestatem evecti quam denotat quantitas q , iis neglectis in quas Coefficientens nulla cadit, tunc quantitates istæ residuæ, his Coefficientibus sic affectæ, denotabunt Probabilitatem quaesitam.

Exempli gratia, si id requiratur inveniendum quænam sit Probabilitas ut ex sex literis, a, b, c, d, e, f , literæ a & b speciatim designatæ loca sua teneant, atque ut c, d, e speciatim etiâ designatæ, a locis suis excludantur; Probabilitas illa ex superius dictis invenietur esse

$$\frac{1}{6 \times 5} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{11}{720}$$

Probabilitas fore ut a locum suum occupet, atque ut b, c, d, e a locis suis separentur, invenietur esse,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{13}{720}$$

Probabilitas fore ut a in loco suo consistat, atque ut literæ reliquæ omnes b, c, d, e, f , e locis suis excludantur, invenietur esse

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{160}{720}$$

B b

Pro-

Probabilitas ut literæ a, b, c, d, e, f , omnes a locis suis excludantur erit

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 5} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} - \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1},$$

sive $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \frac{1}{144} = \frac{53}{144}$.

Hinc Probabilitas ut una saltem litera locum suum teneat, exprimitur Serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144}$.

DEMONSTRATIO.

Numerus casuum quibus a possit locum suum servare, aequalis est numero casuum quibus b possit, dum a moratur in suo loco, & locum suum servare, & ab eo depelli; quod quidem est ejusdem significationis & evidentie ac illud Axioma, totum esse aequale omnibus suis partibus simul sumptis: cui consequens est ut si ex numero casuum quibus a possit in loco suo consistere, subtrahatur numerus casuum quibus a & b possit suum utraque locum servare, relinquetur numerus casuum quibus b , dum a primum locum obtinet, excludi possit a secundo loco.

Ob eandem rationem, si ex numero casuum quibus accidere possit ut a & b suum utraque locum servet, subtrahatur numerus casuum quibus evenire possit ut a, b & c suum quaque locum servant, relinquetur numerus casuum quibus fieri possit ut dum a & b suum utraque locum servat, c locum suum sit amissura; & sic de cæteris.

Denotet $+$ a Probabilitatem fore ut a primum locum occupet, itemque denotet $-$ a Probabilitatem fore ut a a primo loco excludatur. Similiter denotent $++b$ & $--b$, Probabilitates fore ut b locum suum occupet vel ab eo excludatur.

Denotet $++a++b$ Probabilitatem fore ut a & b suum utraque locum servet; denotet $++a--b$ Probabilitatem fore ut dum a locum suum servat, b locum suum sit amissura.

Univerſe, denotentur Probabilitates fore ut literæ quolibet datæ in suis quaque locis consistant, & ut literæ aliæ quolibet datæ a suis quaque locis excludantur, per conjunctas Probabilitates fore ut unaquaque literarum, vel in loco suo consistat, vel ab eo excludatur; exempli gratia denotetur Probabilitas fore ut a, b, c in locis suis consistent, & ut d, e, f a locis suis excludantur per $++a++b++c--d--e--f$.

Jam ut nobis liceat conclusiones utiles ex hac notatione derivare, hæc sunt sedulo observanda, 1^o Operationes circa hanc rem instituendas nihil aliud quam subtractiones continere, 2^o atiam esse rationem subtractionis pro quantitatibus quæ ad levam æquationis partem locantur, aliam pro quantitatibus quæ ad dextram consistunt, 3^o quantitates ad levam subtrahendas unam semper quantitatem amplius continere quam quantitates illæ e quibus fit subtractio; quantitatem autem illam unicam qua fit excessus, excedentem vocari; 4^o quantitates reliquas omnes ad levam possas, tum eas e quibus fit subtractio, tum eas quæ subtrahi debent, eandem prorsus esse, iisdemque signis affectas; 5^o nihil aliud requiri ad subtractionem quantitatum quæ ad levam consistunt quam ut quantitates similes ferventur, muteturque signum quantitatis excedentis: quod quantitates atinet quæ ad dextram penuntur, cum eas sint algebraicæ vulgares, subtractio perficitur more vulgari, jam ut ad Operationes accedamus.

Cum demonstratum fuerit in Cap. III. esse $a = \frac{1}{n}$, $a+b = \frac{1}{n \times n-1}$,

$$a+b+c = \frac{1}{n \times n+1 \times n+2}, \text{ cumque quantitates illæ } \frac{1}{n}, \frac{1}{n \times n-1} \text{ } \mathcal{E}c.$$

appellatæ fuerint r, s, t, v &c. hac concludi poterunt.

$$\begin{array}{l} b \\ b \end{array} = r$$

$$b+a=s$$

$$1^o \text{ ergo } b-a=r-s$$

$$c+b= s$$

$$c+b+a= t$$

$$2^o \text{ ergo } c+b-a= s-t$$

$$c-a = r-s \text{ ex } 1^a \text{ conclusionē,}$$

$$c-a+b = s-t \text{ ex } 2^da,$$

$$3^o \text{ ergo } c-a-b = r-2s+t$$

$$d+c+b = t$$

$$d+c+b+a = v$$

$$4^o \text{ ergo } d+c+b-a = t-v$$

Bb2

d+c=a

$$\begin{array}{l} d+c-a = s-t \text{ ex } 1^{\text{a}} \text{ conclusione} \\ d+c-a+b = s-t-v \text{ ex } 4^{\text{a}}, \end{array}$$

$$5^{\circ} \text{ ergo } d+c-a-b = s-2t+v$$

$$\begin{array}{l} d-b-a = r-2s+t \text{ ex } 3^{\text{a}} \text{ conclusione} \\ d-b-a+c = s-2t+v \text{ ex } 5^{\text{a}} \end{array}$$

$$6^{\circ} \text{ ergo } d-b-a-c = r-3s+3t-v$$

$$\begin{array}{l} -a = 1-r \text{ cum sit } +a = r \\ -a+b = r-s \text{ ex } 1^{\text{a}} \text{ conclusione} \end{array}$$

$$7^{\circ} \text{ ergo } -a-b = 1-2r+s$$

$$\begin{array}{l} -a-b = 1-2r+s \text{ ex } 7^{\text{a}} \text{ conclusione} \\ -a-b+c = r-2s+t \text{ ex } 3^{\text{a}} \end{array}$$

$$8^{\circ} \text{ ergo } -a-b-c = 1-3r+3s-t$$

Jam si superiores conclusiones attente considerentur, illud percipietur, si quaestio nihil aliud requirat quam ut literae quadam assignatae a locis suis excludantur, nec quidquam praescriptum fuerit de permutatione cujusquam literae in suo loco, tunc quantitates ad dextram partem Aequationis positas constanter initium sumere ab Unitate; illud etiam percipietur, si una tantummodo litera requiratur ut locum suum seruet, tunc quantitates ad dextram positas initium ducere ab r ; at si binae literae requirantur ut locum suum seruent, tunc quantitates ad dextram positas initium ducere ab s , & sic deinceps: praeterea illud perspicuum est has quantitates alternatim sua signa variare, & Coefficientes ipsis praefixas esse Coefficientes Binomii cujus Index aequalis est numero literarum a suis locis exclusarum.

PROBLEMA.

Data multitudine quacunque n literarum a, b, c, d, e, f &c. quae singulae toties repetantur quoties Unitas reperitur in 1 ; invenire Probabilitatem ut una aliqua litera cujusque speciei assignata in loco suo consistat, vel Probabilitatem ut a loco suo excludatur.

SOLUTIO

SOLUTIO.

Cum n designet numerum literarum omnium, l vero numerum illum quo exprimitur quot literæ singularum specierum dentur, consequens est ut $\frac{n}{l}$ exprimat numerum specierum; sit p is specierum numerus quarum unaquæque continere debeat literam aliquam quæ locum suum servet, itemque sit q is numerus specierum quarum nulla ne unam quidem contineat literam quæ non a loco suo excludatur, hinc sit ut $n - p - q$ designet eum specierum numerum de quibus nihil præscribitur; pone $r = \frac{l}{n}$, $s = \frac{ll}{n \times n - l}$,

$t = \frac{l^2}{n \times n - l \times n - 2}$, jam si Regulæ in superiore Problemate traditæ hic observentur, solutio casus cujuscunque hujus Problematis facile obtineri poterit, v. g. si id requiratur inveniendum quanam futura est sit Probabilitas ut nulla litera cujuscquam speciei locum suum teneat; hæc Probabilitas invenietur esse

$$1 - \frac{q}{1}r + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}s - \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3}t + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4}v$$

Ecce jam vero est $q = \frac{n}{l}$, quapropter Series superscripta in hanc alteram mutabitur $\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{n-1} - \frac{1}{6} \times \frac{n-1 \times n-2}{n-1 \times n-2} + \frac{1}{24} \times \frac{n-1 \times n-2 \times n-3}{n-1 \times n-2 \times n-3}$ Ecce proinde Probabilitas ut una saltem species aliquam literam contineat quæ in loco suo consistat sic exprimitur

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{6} \times \frac{n-1 \times n-2}{n-1 \times n-2} - \frac{1}{24} \times \frac{n-1 \times n-2 \times n-3}{n-1 \times n-2 \times n-3}$$
 Ecce. at si id requiratur, quanam futura sit Probabilitas ut binæ saltem species contineant aliquam literam quæ in loco suo consistat, illud hoc argumentandi modo invenietur.

I. Probabilitas ut species aliqua assignata contineat literam aliquam quæ in loco suo consistat, atque ut nulla reliquarum specierum ullam contineat literam quæ non a loco suo excludatur, erit

$$\frac{1}{n} - \frac{l \times n - l}{n \times n - l} + \frac{1}{2} \times \frac{l \times n - l \times n - 2l}{n \times n - l \times n - 2}$$
 Ecce. quod quidem facile fuit ex

generali Serie $r - q + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}t$ Ecce. ponendo $q = \frac{n}{l}$, $1 = \frac{n-1}{l}$.

II. Jam vero si nulla Species assignetur, sed possit earum quælibet hac prærogativa frui, ut nulla alia ullam contineat literam quæ potest natur

natur in suo loco, tunc quoniam numerus specierum omnium denotatur per $\frac{n}{l}$, termini singuli seriei superioris multiplicari debent per $\frac{n}{l}$, quo facto, probabilitas ista reperietur

$$1 - \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1 \times n-2}{n-1 \times n-2} + \frac{1}{6} \times \frac{n-1 \times n-2 \times n-3}{n-1 \times n-2 \times n-3} \text{ \&c.}$$

III. Jam vero si ex Probabilitate ut una saltem species contineat aliquam litteram quæ locum suum servet, subtrahatur Probabilitas ut una tantummodo hac prerogativa fruatur, relinquetur Probabilitas ut duæ saltem indiscriminatione sumptæ contineant litteram aliquam suæ speciei quæ locum suum teneat, quæ Probabilitas idcirco erit $\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{n-1} - \frac{2}{1 \times 3} \times \frac{n-2}{n-2} A + \frac{3}{2 \times 4} \times \frac{n-3}{n-3} B - \frac{4}{3 \times 5} \times \frac{n-4}{n-4} C \text{ \&c.}$ Eadem argumentandi ratione, conclusiones infra posse facile demonstrari poterunt.

Probabilitas ut ternæ saltem species indiscriminatione sumptæ contineant aliquam litteram quæ locum suum servet, erit

$$\frac{1}{6} \times \frac{n-1 \times n-2}{n-1 \times n-2} - \frac{3}{1 \times 4} \times \frac{n-3}{n-3} A + \frac{4}{2 \times 5} \times \frac{n-4}{n-4} B - \frac{5}{3 \times 6} \times \frac{n-5}{n-5} C \text{ \&c.}$$

Probabilitas ut quatuor saltem species indiscriminatione sumptæ contineant litteram aliquam quæ locum suum servet, erit

$$\frac{1}{24} \times \frac{n-1 \times n-2 \times n-3}{n-1 \times n-2 \times n-3} - \frac{4}{1 \times 5} \times \frac{n-4}{n-4} A + \frac{5}{2 \times 6} \times \frac{n-5}{n-5} B - \frac{6}{3 \times 7} \times \frac{n-6}{n-6} C \text{ \&c.}$$

Cum vero Lex continuationis istarum Serierum sit perspicua, non difficile foret eas omnes sub una lege complecti, sed Symbola in nimiam molem excreverent, quod maximum mihi videtur incommodum.

Ex Principiis supra positis, hæc facile deducuntur: si sumantur Manipuli duo Chartarum ex 52 foliis uterque constans, atque id requiratur inveniendum, quanam futura sit Probabilitas ut Chartæ quæcunque binæ ejusdem nominis & figuræ, semel vel sæpius in suo utraque Manipulo eundem locum obtineat, Probabilitas quæstæ invenietur per Seriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} \text{ \&c.}$ ad tot terminos continuandam quot sunt folia in Manipulorum alterutro.

Si termini quique bini superioris Seriei alter alteri jungatur, Series evadet

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 6} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} \text{ \&c.}$$

cujus termini 26 sumendi sunt, sed propter maximam hujus Seriei

con-

convergentiam, perpauci illius termini in unam summam collecti ad verum prope accedent, sumptis itaque quinque terminis Probabilitas quaesita satis bene designabitur per fractionem $\frac{2^{14} 487}{49390}$, at vero Probabilitas ut binæ Chartæ ejusdem nominis & figurae bis vel sapius eundem locum obtineant non magis erit quam $\frac{31}{125}$ circiter.

Si *A* & *B* uterque Manipulum Chartarum tenens, eas simul ex suo uterque Manipulo aliam post aliam extrahant, atque ita inter se paciscantur ut quotiescunque Chartæ quolibet binæ ejusdem nominis & figurae eductæ fuerint, *A* daturus sit *B* nummum 1, modo *B* velit ipsi in manum dare certam pecuniam qua promissam illud compenseetur; jam vero si quæras quantam pecuniam *B* debeat ipsi *A* pendere, quaesitum invenies esse nummum unum, eandem utique pecuniam semel datam quam *B* recepturus sit quotiescunque fors ipsi favorebit: cujus Demonstratio quanquam ex antedictis facile deduci possit, ex hac tamen consideratione facilius deducetur quod cum possint esse 52 Bigæ Chartarum, Expectatio ipsius *B* ex unaquaque possibili Biga oriunda est quinquagesima secunda pars unius nummi, adeoque Expectatio illius totalis ex universis Bigis oriunda erit = 1, quod semper valebit quantuscunque futurus sit Chartarum numerus.

C A P U T VI.

De Numero Punctorum in Tesseri.

Nemo fere est qui nesciat, unius Tessera 6 esse jactus diversos, duarum Tesserarum 36, trium 216, quatuor 1296 &c. & sic deinceps, multiplicato numero jactus proxime antecedente per 6, ut habeatur consequens.

Sed non aequè facile apparet qua methodo invenire liceat multitudinem casuum quibus datus Punctorum numerus dato Tesserarum numero jaci possit.

D. Monmort exhibuit Tabulam qua continentur casus omnes Tesserarum a duabus Tesseris ad novem usque inclusive.

In Tractatu de *Mensura Sortis*, nullam ego Tabulam de hac re prout, sed Methodum exhibui qua casus quilibet quaesitus facile obtineri possit.

D. Mon-

D. *Memori* in Epistola ad D. *Nic. Bernoulli*, approbationem suam declaraverat modi illius quo ad hanc solutionem perveneram, sed praeferre non poterat quin affirmaret me eam ex pag. 141. Libri sui desumpisse.

Cum vero nimis longum fuisset ostendere quonam artificio ex inspectione istius Tabulae hanc mihi solutionem arcessere potuissem, maluit Vir Clarissimus difficultates omnes praeterlabi, & quasi assertio sua confirmatione non indigisset, ad res majoris momenti propere.

Attamen cum non cuilibet concedatur facultas veri percipiendi nisi id argumentis eluceat, ea aliquatenus recuperare conabor quae ad assertionem suam firmandam ille sine dubio attulisset, si quid operae in hanc rem collocare sibi visum fuisset: quamobrem non alienum esse existimo ea quam breviter potero exponere non modo quae in pag. 141. ejus libri, sed etiam ea quae in pag. 139. & 140. ad hanc rem pertinentia reperiuntur, quo fiet ut Lectori melius colligere liceat quid Vir Cl. ad solutionem meam contulerit.

Ut vero ordine procedamus, observandum est cum pag. 139. & 140. explicasse methodum qua Tabula casuum in pag. 141. exhibitae construeretur: quam ut uno exemplo patefaciamus, ponatur id requiri ut inveniatur multitudo casuum quibus puncta sexdecim quatuor tesserae exhiberi possint.

Illud praemisera Vir Cl. facies omnes quatuor tesserae, 1^o vel omnes dissimiles esse, 2^o vel duas esse inter se similes, duas vero dissimiles, 3^o vel bis binas esse inter se similes, 4^o vel tres esse inter se similes, quartam vero simplicem, 5^o vel omnes esse inter se similes.

Porro si ita evenierit ut Facies omnes sint inter se dissimiles, idem Facierum aspectus variabitur 24 modis; etenim pone exempli causa Faciem unam exhibuisse Binarium, alteram Ternarium, tertiam Quinarium, quartam Senarium, tum patet has easdem Facies tot modis exhiberi posse quot literae quatuor *a, b, c, d*, inter se dissimiles loca sua variare possunt; nam quemadmodum litera *a* in eam sedem traduci potest quam *c* occupat, & vice versa litera *c* in eam sedem quam occupat *a*, quo fit ut inde oriatur nova dispositio *c, b, a, d*, sic Tessera ea quae Binarium exhibuerat, non quidem mutata sede, sed circa se ipsam volvente nunc quinarium exhibere potest; & vice versa Tessera ea quae ante Quinarium exhibuerat, nunc Binarium potest exhibere; Tesserae igitur omnes, mutatis vicissim faciebus suis, in tot varietates se componunt quot literae ejusdem diversitatis ac Tesserae Facies, loca sua inter se variare possunt: at ex Dogmatum Permutationum, liquet literas *a, b, c, d*, variare loca sua 24 modis;

b, c, d, variare loca sua 24 modis, sunt igitur 24 casus quibus contingere potest ut quatuor Tesseræ inter se dissimiles sub eodem aspectu appareant.

Si secundus casus evenierit, hoc est, si fuerint Faciès duæ inter se similes, duæ dissimiles; tum numerus varietatum quæ ex hoc eodem aspectu sunt originæ erit = 12.

Si tertius casus evenierit, numerus varietatum erit 6.

Si quartus, numerus varietatum erit 4.

Si quintus, nulla varietas inde orietur, atque adeo casus iste est unicus, quem idcirco per 1 designare debemus.

Quamobrem si scribantur Faciès omnes quæ simul junctæ numerum punctorum datum conficiant, istque regione adscribantur varietates quæ ex respondente Facierum aspectu oriri possint, deinde colligantur numeri varietatum in unam summam, hæc summa quæsito satisfaciet, ut videre est in subiecto Paradigmati.

Tesserarum Faciès	Varietates
1, 3, 6, 6 --	-- 12
1, 4, 5, 6 --	-- 24
1, 5, 5, 5 --	-- 4
2, 2, 6, 6 --	-- 6
2, 3, 5, 6 --	-- 24
2, 4, 4, 6 --	-- 12
2, 4, 5, 5 --	-- 12
3, 3, 4, 6 --	-- 12
3, 3, 5, 5 --	-- 6
3, 4, 4, 5 --	-- 12
4, 4, 4, 4 --	-- 1
125 numerus varietatum.	

Sunt igitur casus 125 quibus Puncta sexdecim quatuor Tesseris jaci possint, & eodem modo invenire licet numeros casuum quibus Puncta singula quatuor Tesserarum varie exhibeantur quos hic apponere visum est.

Puncta	Casus
IV - - - -	1
V - - - -	4
VI - - - -	10
VII - - - -	20
VIII - - - -	35
IX - - - -	56
X - - - -	80
XI - - - -	104
XII - - - -	125
XIII - - - -	140
XIV - - - -	146
XV - - - -	140
XVI - - - -	125
XVII - - - -	104
XVIII - - - -	80
XIX - - - -	56
XX - - - -	35
XXI - - - -	20
XXII - - - -	10
XXIII - - - -	4
XXIV - - - -	1

1296 Summa casuum.

Atque eodem modo Tabula casuum effingi potest quæ ad multitudinem quamcunque Tesserarum datam porrigatur.

Regula autem a me tradita ad inveniendum numerum casuum quibus datus punctorum numerus, dato Tesserarum numero, jaci possit, sic expressa fuerat.

Sit $p \rightarrow 1$ datus Punctorum numerus, n numerus sive multitudo Tesserarum, f numerus facierum in singulis Tesseriis, pone $p-f=q$, $q-f=r$, $r-f=s$, $s-f=t$ &c. tum numerus casuum quæsitus erit

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \&C. \\
 & - \frac{1}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \&C. \times \frac{n}{1} \\
 & + \frac{1}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \&C. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \\
 & - \frac{1}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \&C. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \\
 & \&C.
 \end{aligned}$$

Circa

4^o. Debiti percepisse casus sex deinceps insequentes novam variationem inducere, & universe casus sexos omnes sibi propriam suam regulam asciscere, & sic in infinitum.

Quibus perpensis non satis inteligo quomodo in me cadere potuit vel minima suspicio me hanc Regulam a Cl. Viro desumpsisse.

Sed ut omnis controversia de superiori solutione tandem cessaret, id asserere non verbor me nec ex Doctrina Combinationum, nec ex propriis numerorum figurarum, nec ex Methodo Differentiarum eam mihi comparasse.

Investigatio Superioris Regule.

Si Tesserae ita singantur ut Facies una in singulis Monada signetur, tum tot facies Binario signentur quot sunt Unitates in numero r ad libitum assumpto, deinde tot Facies signentur Ternario quot sunt Unitates in rr , & sic deinceps, ita ut casus omnes singularum testarum denotentur progressionem geometrica $1+r+r^2+r^3$ &c. ad tot terminos continuatae quot sunt Facierum diversae appellationes f ; tunc eveharur hae progressio ad eam potestatem n quam denotat multitudo Tesserarum, palam est terminos huius potestatis sigillatim designaturos omnes casuum varietates quas singuli Punctorum numeri n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, &c. quarum minimus est n , eodem ordine sumpti subire possunt. Nihil igitur magis requiritur ad inveniendum numerum casuum quibus datus Punctorum numerus $p+1$ jaci possit quam ut assignetur in potestate $1+r+r^2+r^3$ &c. terminus ille cujus intervallum a primo designatur per $p+1-n$.

Quod ut assequamur, considerandum est summam progressionis geometricae $1+r+rr+rrr$ &c. esse $\frac{1-r^f}{1-r}$ seu $1+r^{f-1}+r^{f-2}+r^{f-3}$ &c. est igitur $\frac{1+r+r^2+r^3}{1-r} = \frac{1-r^f}{1-r} = 1+r^{f-1}+r^{f-2}+r^{f-3}$, est autem $\frac{1-r^f}{1-r} = 1+r+r^2+r^3$ &c. itemque est $\frac{1-r^{fn}}{1-r^n} = 1+nr^n+r^{2n}+r^{3n}$ &c. quapropter si hae binae Series inter se multiplicentur, termini illi omnes Seriei productae quos afficiet potestas $p+1-n$ quaesito satisfacient.

Ponatur nunc compendii gratia $p+1-n=l$, sit autem E^{p-1} terminus ille prioris Seriei, cujus distantia a primo est l , sit etiam D^{p-1} terminus ille cujus distantia a primo est $l-f$, deinde sit C^{p-1} terminus ille cujus distantia a primo est $l-2f$, & sic deinceps, facto semper

semper regressu per aequales saltus versus primum Seriei terminum; quibus positis, si termini illi quos supra designavimus scribantur ordine inverso ad hunc modum $E^r + D^{r-1} + C^{r-2} \&c.$ usque subiciantur termini posterioris Seriei ordine naturali scripti ad hunc modum, $1 - nr^f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^f \&c.$ deinde termini respondentes omnes in se invicem multiplicentur, singuli per singulos, consequens erit ut ex hac multiplicatione oriatur terminus

$$E^r - nD^r + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} C^r - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{1} B^r \&c. \text{ qui omnes potestare } r^f \text{ afficiantur.}$$

Porto cum Coefficientis E tot factoribus constet $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \&c.$ quot sunt Unitates in l , patet horum factorum Denominatores istos qui post eum Denominatorum numerum quem designat $n-1$ sunt orituri, evasuros $n, n-1, n-2, \&c.$ qui idcirco iidem sunt ac primi Numerorum termini, quapropter si ex valore Coefficientis E abiciantur illi Numeratores & Denominatores qui sunt inter se aequales, relinquetur ex Numeratoribus ordine inverso scriptis, $n-1-1, n-1-2, n-1-3, \dots, l-1$, ex Denominatoribus vero ordine naturali scriptis, $1, 2, 3, \dots, n-1$; quae omnia facile fluunt ex natura Progressionis arithmeticae, erit igitur terminus

$$E^r = \frac{n+1-1}{1} \times \frac{n+1-2}{2} \times \frac{n+1-3}{3} \dots \frac{l+1-1}{l-1} r^f, \text{ sed ex Hypothesi,}$$

est $p-1-n=l$, proinde erit $p=n-1-1$, adeoque

$$E^r = \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \&c. \times r^f, \text{ \& eodem modo invenietur}$$

$$-nD^r = -\frac{p-1}{1} \times \frac{p-1-1}{2} \times \frac{p-1-2}{3} \&c. \times nr^f, \text{ atque etiam}$$

$$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} C^r = +\frac{p-2}{1} \times \frac{p-2-1}{2} \times \frac{p-2-2}{3} \&c. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} r^f, \text{ \& sic deinceps, pone jam } r=1, p-f=q, q-f=r, r-f=s, \&c. \text{ habebis}$$

Regulam a nobis allatam.



CAPUT VII.

Continuatio Responsionis ad Criminationes.

Illud majori quidem quamvis perexigua probabilitatis specie credi potuisset, me solutiones Problematum quæ vocant *Bassetiæ & Pharaonis* ex Cl. viro desumpisse, non enim deerant debilia quedam indicia quæ primo aspectu huic opinioni favere poterant; primum est quod ille ante me hæc Problemata solverat, deinde quod cum Tabulas exhibuisset quibus lucrum seu Prærogativa Oeconomi (*Gallice Banquier*) pro variis conditionibus seu circumstantiis ludi contineretur, ego similes quoque Tabulas exhibuerim; tertium quod leges horum ludorum ex ejus libro verbatim fere recensuerim.

Sed non difficile factu erit suspensiones omnes, si qua tamen suspicio in me cadit, a me depellere: etenim cum Vir Doctissimus ipse non crediderit se a solutione istorum Problematum abstinere debuisse, quamvis prius jamdudum a Dom. *Sauveur* solutum fuisset, ut videre est in *Paris. Erudit. Diario Mens. Feb. 1679.* posterius vero ex prioris solutione paucis mutandis deduci potuerit, quidni mihi licuisset eodem jure uti, measque solutiones in medium afferre, idque eò maxime quod Solutiones D. *Memmort* vix quidquam amplius habuerint quam periculationes de combinandis inter se lis quantitatibus quæ solutioni Problematum possent esse utiles, inutilibusque rejiciendis, quod quidem non multum artis requirebat; quod si ego Tabulas de lucro Oeconomi exhibuerim, id in eorum gratiam factum fuerat qui computationibus algebraicis non erant satis assueti, nec si Tabulas non dedissem, solutio Problematis quidquam deliderasset: præterea si leges ludi ex Cl. viri libro descripserim, non illi magis hac ratione debeo quam quod mihi non necesse fuerit ut quenquam de his legibus percontarer.

Reliquum est ut pauca attingam de Methodo solutionis, sed priusquam illud fiat, non alienum erit commemorare locum Epistolæ cujusdam a D. *Memmort* ad D. *Nic. Bernoulli* scriptæ, his verbis expressum; *Problema Moivrai undecimum aliter solvitur in ejus libro, aliter in meo, quæ solutionum varietas inde oritur quod varie accipimus sensum Propositionis*: circa quæ tria veniunt observanda, primum quod Problema istud undecimum propositum fuerat ab *Huygenio*, non autem solum; deinde quod D. *Memmort* perperam accepit

perat sensum Propositionis *Huygenianæ*, quemadmodum a D. *Joh. Bernoulli* admonitus fuerat; postremo quod solutio istius Problematis a me exhibita in Tractatu de *Mensura Sortis*, fons fuerit e quo solutiones meae Problematum *Bassettae* & *Pharaonis* quæ conspici possunt in secunda editione ejusdem libri facile manant, adhibita tamen Methodo Differentiarum quam nemo inficiabitur quin meo jure adhibere potuerim: his accedit quod Doctrina Combinatorium a D. *Momort* ad solutionem suam istorum Problematum usurpata nihil quidquam ad solutionem meam contulerit, ita ut si *Merhodus* illa non extitisset, hæc tamen Problemata a me soluta fuissent; quamvis autem non putem id esse operæ pretium ut solutiones ipsas recenscam, attamen lubet asserere solutionem Problematis *Huygeniani*.

PROBLEMA HUYGENIANUM ab Autore non Solutum.

Tres Collatores A, B, C, assumentes duodecim calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri sunt, ludant hac conditione ut qui prius ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, tertia penes C; & tum sequens rursus penes A, & sic deinceps ordine: queritur quanam futura sit ratio sortium ipsorum A, B, C.

SOLUTIO.

Sit n numerus calculorum omnium, a numerus alborum, b numerus nigrorum, 1 summa deposita seu premium victori concedendum.

I. *A* habet casus a quibus album, & casus b quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex prima electione oriunda est $\frac{a}{a+b}$ sive $\frac{a}{n}$; quamobrem si $\frac{a}{n}$ ex 1 subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $1 - \frac{a}{n} = \frac{n-a}{n} = \frac{b}{n}$.

II. *B* habet casus a quibus album, & casus $b-1$ quibus nigrum eligat, sed prima electio est penes *A*, & incertum est utrum ille victurus sit nec ne, adeoque premium respectu ipsius *B* non est 1, sed tantummodo $\frac{b}{n}$, illius igitur expectatio ex secunda electione oriunda

riunda est $\frac{a}{a+b-1} \times \frac{b}{n} = \frac{ab}{n \times n-1}$. Subtrahatur $\frac{ab}{n \times n-1}$ ex $\frac{1}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{1}{n} \times \frac{b-1}{n-1}$.

III. C habet casus a quibus album, & casus $b-2$ quibus nigrum eligit, adeoque ejus expectatio ex tertia electione, erit $\frac{a \times b \times b-1}{n \times n-1 \times n-2}$.

IV. Eodem modo A habet casus a quibus album & casus $b-3$ quibus nigrum eligit, adeoque ejus expectatio ex quarta electione erit $\frac{a \times b \times b-1 \times b-2}{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}$; & sic dainceps de ceteris.

Scribarur ergo series $\frac{a}{n} + \frac{1}{n-1}P + \frac{b-1}{n-2}Q + \frac{b-2}{n-3}R + \frac{b-3}{n-4}S$ &c. in qua P, Q, R, S, &c. more *Newtoniano* designent terminos precedentes; tum sumantur tot termini hujus Series quot sunt Unitates in $b-1$, etc. tum non plures erunt electiones quam sunt Unitates in $b-1$, & summa tertiorum omnium, intermissis binis, terminorum, incipiendo ab $\frac{a}{n}$ erit tota expectatio ipsius A, summa tertiorum itidem omnium incipiendo a $\frac{1}{n-1}P$ erit tota expectatio ipsius B, summa tertiorum omnium incipiendo a $\frac{b-1}{n-2}Q$ erit tota expectatio ipsius C; pene nunc $a=4$, $b=8$, $n=12$, quo facto Series generalis in hanc particularem converteretur, nimirum

$$\frac{4}{12} + \frac{1}{11}P + \frac{7}{10}Q + \frac{6}{9}R + \frac{5}{8}S + \frac{4}{7}T + \frac{3}{6}V + \frac{2}{5}X + \frac{1}{4}Y.$$

sive in hanc alteram (multiplicando terminos omnes per eum numerum qui tollendis fractionibus magis idoneus judicabitur nempe hoc in casu per 495) $165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1$. adeoque tribuantur ipsi A $165 + 56 + 10 = 231$, ipsi B $120 + 35 + 4 = 159$, ipsi C $84 + 20 + 1 = 105$, erunt igitur eorum expectationes ut 231, 159, 105, sive ut 77, 53, 35.

COROLLARIUM I.

Si plures sint Collatores A, B, C, D, &c. sive ii calculum unum, sive plures, sive eundem calculorum numerum, sive diversum, vicibus suis elegerint, eorum expectationes ope superioris Series facili negotio determinabuntur.

COROLLARIUM II.

Si vero Problema *Hyperbolicum* accipiar eo sensu quo illud intellexit *D. Mammert*, nimirum ut si cui Collusorum contrigerit ut calculum nigrum educat, cum illico in acervum recondat, res facillime conficietur, non quidem per *Aequationes* e quibus, nihil praeter casus particulares colligere licet, sed ejus Series subsidio quam ante adhibuimus; etenim cum, ex Hypothesi, nihil unquam detrahatur de numero calculorum, pro $b-1$, $b-2$, $b-3$, &c. $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. scribantur b & n respective, tum Series Problematis superioris evadet $\frac{a}{b} + \frac{ab}{m} + \frac{abb}{n^2} + \frac{ab^2}{n^3} + \frac{ab^3}{n^4} + \frac{ab^4}{n^5} + \frac{ab^5}{n^6}$ &c. quæ est in infinitum continuanda, cujus si sumantur tertii quique termini, expectationes erunt

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} + \frac{ab^2}{n^2} + \frac{ab^3}{n^3} + \frac{ab^4}{n^4} & \text{ &c.} \\ \frac{ab}{m} + \frac{ab^2}{n^2} + \frac{ab^3}{n^3} + \frac{ab^4}{n^4} & \text{ &c.} \\ \frac{abb}{n^3} + \frac{ab^2}{n^4} + \frac{ab^3}{n^5} + \frac{ab^4}{n^6} & \text{ &c.} \end{aligned}$$

sed termini harum serierum sunt in progressionem geometricam, & ratio cujusque termini ad sequentem eadem est ubique, nempe ut n^2 ad b , quapropter summa serierum erunt ut primi ipsarum termini, hoc est ut $\frac{a}{n}$, $\frac{ab}{m}$, $\frac{abb}{n^3}$, sive ut mn , bn , bb , quod in casu hujus Problematis sit 9, 6, 4, quos quidem numeros particulares *Cl. Mammert* ex *Aequationibus* deduxerat.

COROLLARIUM III.

Si Collusores quocunque *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. conditionibus secundi Corollarii certent, sume tot terminos in ratione n ad b quot sunt Collusores, termini illi, suo quique ordine sumpti, denotabunt Extationes Collusorum.

Hactenus credo Lectoribus satis constare me in secunda Editione Libri *de Serie* nihil quidquam a *D. Mammert* mutasse quod spectaret Series infinitas, Combinationes, numeros figuratos, Methodum Differentiarum, Solutiones Problematum *Bassette* & *Pharosis*; nunc

videamus qua ratione inductus Vir Clarissimus sibi persuadere potuerit me, in prima Editione ejusdem libri, operam satis inutilem collocasse in solvendis iis Problematicis quæ ipse prius solverat, meaque solutiones ad factum inspirationem fuisse confectas, vel quod multo gravius est eas ex suis verbis expressas fuisse, quem animi sui sensum non ille quidem charæ commisit, amicis tamen suis ore imperivit: ut verò melius appareat quæ aequitate Vir Cl. judicium adeo durum de me pronunciarit, non alienum erit eas afferre solutiones quas uterque nostrum varie confectas de Problemate quinto *Huygeniano*.

PROBLEMA II. HUYGENIANUM quintum.

A & B assumentes singuli 12 numeros ludunt tribus Tessis hac conditione ut si 11 Puncta jacentur, A tradat nummum ipsi B, at si 14 Puncta jacentur, B tradat nummum ipsi A, & ut ille ludum victurus sit qui primum omnes habuerit numeros, queritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Quod ut solveret Vir Doctissimus, tres & viginti quantitates incognitas adhibuerat quibus variae Collusorum conditiones ex continuatione ludi necessario emergentes exprimerentur; etenim cum fors ipsius *A* possit subire undecim mutationes, prout ille nummum unum vel duo vel plures vicerit, possitque propter eandem rationem fors ipsius *B* totidem variationes inducere, sequitur esse viginti duo conditiones quibus *A* & *B* post inceptum ludum varie afficiantur; his si addatur conditio ludi incipientis, conditiones erunt omnino viginti tres, cui respondent totidem incognitæ a D. *Montmort* usurpatæ: illud vero est notatu maxime dignum quod si *Huygenius* majorem numerum numerum sumpsisset, qualem v. g. 100, necesse futurum fuisset ut Vir Cl. sua methodo adstrictus adhibuisset 199. incognitas quarum valores intra Decennium non eliciuisset, etenim si sit *n* numerus numerorum quos singuli habeant, oportet adhiberi tot Aequationes quot sunt Unitates in *2n-1*.

Cum vero non necesse habeam hanc *Montmortianam* Solutionem ulterius persequi quam quidem leviter indicare satis est, ad nostram pergere visum est.

SOLUTIO superioris Problematis. *

Sit *p* numerus numerorum quos uterque sigillatim assumat, sine *a* & *b* numerus casuum quibus Collusores *A* & *B* nummum unum vincere

* Probl. IX. de Mensura Sortis.

placere possint, tunc ratio fortium erit a ad b ; jam in casu proportionis est $p=12$, $a=17$, $b=15$, sive cum sit 27 , $15:9, 5$, pone idcirco $a=9$, $b=5$, hinc ratio expectationum erit ut 9 ad 5 , sive ut 282429536481 ad 244140625 qualem *Huygenius* fore asseruit.

SOLUTIO generaliter.

Sit p numerus numerorum ipsius A , q vero numerus numerorum ipsius B ; & A in se suscipiat ut prius nummos q , quam B nummos p lucraturus sit, tunc ratio fortium erit ut $a^q \times a^p - b^p$ ad $b^p \times a^q - b^q$.

INVESTIGATIO.

Finge A nummos habere $E, F, G, H, \&c.$ quorum numerus sit p , B vero habere nummos, $I, K, L, \&c.$ quorum numerus sit q ; finge insuper valorem cujusque nummi esse ad valorem sequentis ut a ad b , ita ut E, F, G, H, I, K, L , sint in progressionem geometrica; his ita positis, poterunt A & B , quotiescunque jactus aliquis instituitur, eas deponere summas quæ sint respective proportionales numeris casuum quibus alter alterum vincere possit; etenim cum primum ludere incipiunt potest A deponere numerum H , at vero B numerum I , sed H ad I ex Hypothesi est ut a ad b , ergo jam A & B aequali conditione certant; pone A vicisse, poterit igitur ille deponere numerum I , at B numerum K , sed I ad K ex hypothesi est ut a ad b , ergo A & B etiamnum pergunt certare aequali conditione; sin, B primo jactu vicarit A , poterit A tunc deponere numerum G , at vero B numerum H , quorum numerorum G & H ratio est ut a ad b , & sic deinceps; ergo quandiu A & B certant, semper certant aequali conditione: jam vero Expectatio ipsius A in summam quam B deposuit est in ratione composita ex ea summa & ex Probabilitate eam obtinendi, & vicissim Expectatio ipsius B in summam quam A deposuit est in ratione composita ex ea summa & ex Probabilitate eam idem obtinendi, hæc vero Expectationes cum sint æquales, sequitur Probabilitates quas A & B respective habent ut adversarium suum vincant esse in ratione summarum quas ipsi deponunt, hoc est ut summa Terminorum $E, F, G, H, \&c.$ quorum numerus est p ad summam terminorum $I, K, L, \&c.$ quorum numerus est q , hoc est ut $a^1 \times a^p - b^p$ ad $b^p \times a^q - b^q$, quod facile constabit ex

Methodo summandi Progressiones geometricas: jam ex eo quod positi fuerint nummi, quisque ad sequentem, ut a ad b , non inde

quidquam mutationis inductum est in Probabilitates vincendi, ergo hoc posito valores singulorum esse inter se aequales, Probabilitates vincendi seu sortes ipsorum *A* & *B* etiamnum erunt inter se in illa ipsa ratione quam definivimus.

COROLLARIUM I.

Si *a* & *b* habent rationem aequalitatis, ratio sortium erit ut *p* ad *q*; etenim si quantitates illae quibus ratio sortium exprimitur ambae dividantur per *a—b*, primus quotiens erit

$$\frac{a^1 \times a^0 - 1b + a^0 - 2bb + a^0 - 3b^2}{\text{Ec.}}$$

ad tot terminos continuatus quot sunt unitates in *p*, secundus vero erit $\frac{a^1 \times a^1 - 1b + a^1 - 2bb + a^1 - 3b^2}{\text{Ec.}}$ ad tot terminos continuatus quot sunt unitates in *q*; at termini omnes harum Serierum sunt inter se aequales propter *a=b*, earum igitur summae erunt ut quantitates *p* & *q* quibus multitudines terminorum designantur, ac proinde ratio sortium erit ut *p* ad *q*.

COROLLARIUM II.

Si *A* habeat nummum unicum, *B* vero numerum quemlibet nummorum quantumvis magnum, sed singulis Tesserae jactibus Probabilitates vincendi sunt ut 2 ad 1, probabilius erit ut *A* lucraturus sit omnes nummos ipsius *B* quam ut *B* sit lucraturus unicum illum nummum quem habet *A*, etenim ratio sortium hoc in casu evadit ut 2¹ ad 2¹—1.

Cum vero superius Problema habeat affinitatem aliquam cum Problemate quodam alio mihi a spectatissimo viro Dom. Tho. Woodcock olim proposito cui solutionem paucis post diebus quam propositum erat imperiveram, non abs re fuerit hoc priori subnectere.

PROBLEMA III.

Si *A* & *B* quorum Dexteritates seu casus quos uterque habet ad vincendum sunt inter se in ratione data *a* ad *b*, depontant in singulos ludos summas quae sunt inter se ut *L* ad *G*, & hoc pactum ineant ut non prius ludendi finem faciant quam vel *A* ab adversario tot deposita abstulerit quot sunt unitates in *q*, vel *B* tot abstulerit ab *A* quot sunt unitates in *p*; queritur Lucrum vel Damnum ipsius *A*.

SOLU-

SOLUTIO.

I. Sine numeri p & q inter se aequales, itemque sint Dexteritates a & b inter se in ratione aequalitatis: his positis, Lucrum ipsius A designabitur per $pp \times \frac{G-L}{2}$, quod in Damnum converteretur si sit L minus quam G .

II. sine numeri p & q inter se inaequales, sed pone dexteritates esse aequales, tunc Lucrum ipsius A exprimeretur per $pq \times \frac{G-L}{2}$.

III. Sine p & q inter se inaequales, dexteritates vero in aequales, tunc Lucrum ipsius A exprimeretur per $\frac{pa^2 - pb^2}{a^2 + b^2} \times \frac{aG - bL}{2}$.

IV. Sine p & q , itemque a & b inter se inaequales, tunc lucrum ipsius A erit $\frac{qa^3 \times a^2 - b^2 - pb^2 \times a^2 - b^2}{a^{2+1} + b^{2+1}} \times \frac{aG - bL}{a - b}$.

Alliganto postquam Problema superius fuerat a me solutum, ad D. Nic. Bernoulli scripseram me illud solvisse, ipsa tamen solutione non missa; hoc tantummodo innuens eam a Methodo serierum infinitarum deductam fuisse, ut vero Vir Cl. Epistolam meam accepit, ille binas ad me misit solutiones quarum conclusiones cum mea omnino coincidebant, sed cum modus solutionis uterque quo Vir Cl. usus est melior meae fuerit, visum est meum suppressere; ex binis vero solutionibus quas mihi imperiverat, eam asserre quae mihi praetera placuit; sic igitur ad me scripsit.

“ Patrus meus observabit Problema istud posse etiam solvi eadem via qua tu solvisti Problema novum tuum de *Mensura Sortis*, etc.”
 “ nim liquet Collusorum Expectationes nullam mutationem recepturas utrum summae in singulos ludos depositae sint L & G , an vero eae constituent Progressionem huius generis

$$L, G, G + \frac{b}{a} \times G - L, G + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} \times G - L, G + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{b^3}{a^3} \times G - L,$$

“ Sc. cuius terminorum numerus sit $p + q$, ponendo scilicet p & q eos designare depositorum numeros quos A & B sigillatim amittere periclitantur. Siquidem in utroque casu, lucrum ipsius A erit

$$\frac{aG - bL}{a - b}; \text{ jam vero cum summa terminorum quoruncunque huius}$$

“ Pro-

“ Progressionis obtineri possit, consequens est ut summae utrique Collatorum sigillatim competentes obtineantur; sint igitur hæ summae inter se ut S & T , sint etiam Probabilitates quas alter Collatorum habeat ut alterius deposita omnia auferat, inter se ut A & B .

“ B , quæ Probabilitates designantur per quantitates $\frac{a^{1+1}-a^{1b}}{a^{1+1}-b^{1+1}}$ &

“ $\frac{a^{1b}-b^{1+1}}{a^{1+1}-b^{1+1}}$, quemadmodum tu in præfato Problemate ego vero

“ in D. *Mammartii* Libro seorsim invenimus, quibus possis lucrum ipsius A invenietur esse $AT-BS$, seu $\frac{aG-bL}{a-b} \times \overline{Aq-Bp}$.

Ego vero illud ante libenter factus sum, idque ipsum etiamnum libenter fateor, quamvis solutio Problematis mei non causam fortasse dederit hujus solutionis, me tamen nihil juris in eam habere, eamque Cl. illius Autori ascribi æquum esse.

Septem aut octo abhinc annis D. *Stevens*, Int. Templ. Socius, Vir ingenuus, singulari sagacitate præditus, id sibi proposuim habens ut Problema superius allatum solveret, hac ratione solutionem facile hæcurus est, quam mihi his verbis exhibuit.

Sint R & S Probabilitates quas Collatores habent ut alter alterius deposita omnia auferat, quales ex Problemate tuo nono colligere licet, fac 1^o summas in singulos ludos depositas esse inter se æquales, easque esse G & G , cum vero vel A lucraturus sit summam totam qG vel perditurus summam pG , perspicuum est lucrum totum ipsius A designari oportere per $RqG-SpG$, præterea cum summae in singulos ludos depositæ sint G & G , Dexteritates vero a & b , patet lucrum ipsius A , ipsi ex unaquaque lusione oriundum reputari debere per $\frac{aG-bG}{a+b}$: 2^o Pone summas in singulos ludos depositas esse L & G , lucrum igitur ipsius A ex unaquaque lusione ipsi oriundum perinde æstimandum erit ac si esset $\frac{aG-bL}{a+b}$; jam vero lucrum uniuscujusque ludi in primo casu est in ea ratione ad lucrum uniuscujusque ludi in postremo, ut lucrum universum primi casus ad lucrum universum postremi; Lucrum igitur ipsius A ex universis lusionibus ipsi oriundum erit in postremo casu $\overline{Rq-Sp} \times \frac{aG-bL}{a-b}$, seu ut tu

illud expressisti $\frac{qa^{1+1} \times a^b - b^p - p b^p \times a^{1b} - b^p}{a^{1+1} + b^{1+1}} \times \frac{aG-bL}{a-b}$. Doc-

Doctissimus adolescens D. *Cramer* apud Genevenses Mathematicæ Professor dignissimus, cujus recordatio æque ac Collegæ ejus peritissimi D. *Euler* mihi est perducenda, cum superiore anno Londini commemoraretur, narravit mihi se ex literis D. *Nic. Bernoulli* ad se datas accepisse Cl. Virum novam solutionem hujus Problematis adeptum esse, quam prioribus autor anteponebat; cum vero nihil de via solutionis dixerit, si mihi conicere liceat qualis ea sit, hanc opinor eandem esse acque illam quam modo attuli.

Problema Decimum octavum *Tractatus de Mensura Sortis* tale erat ut vix ullum difficilius in tota sortium Doctrina reperias, attamen ejus Solutio ad felicem exitum a me perducta fuerat; de hoc Problemate sic scripsit D. *Memori* ad D. *Nic. Bernoulli*. Problema Decimum octavum *Moiræ* est Problema Combinationum, magnamque habet cognationem cum primo, quo sit ut utriusque solutio ex formula mea elici possit, vel ex generaliiori modo exposita pag. 136. libri mei quæ quidem latius patet quam Autoris Regula, cui D. *Bernoulli* his verbis rescripsit, Problema istud tuum quo dicis contineri Problema *Moiræ* decimum octavum diversum est a *Moiræ* Problemate.

Nōn modo Problema meum differbat a *Memoriano*, sed illud fidenter asserere ausim nihil quidquam extare sive in prima Editione Libri ejus, sive in secunda, quod vel minimum lucis ad eam solutionem possit asserre; quod si quis solo auxilio fructus eorum quæ ex Viri Cl. Libris colligi possint ad hanc solutionem se accingere velit, cum insuperabili labore premi necesse est, antequam dimidiam vel fortasse centesimam partem pensæ sui confecerit; sed lubet tum Problema ipsum, tum solutionem asserre.

P R O B L E M A IV.

Certe A cum B, fore ut ipse, dato tantummodo numero, reserato dato faciem numero constante, facies quascunque datas iactus sit: queritur Expectatio ipsius A.

S O L U T I O.

Sit $p+1$ numerus facierum in tessera, n numerus tantummodo datus, f numerus facierum quas jaci oporteat.

Numerus casuum quibus A Monadena semel vel pluries tantummodis numeris n jacere possit, est $p+1 \times n - p^n$ ut patet ex ante demonstratis.

Ex.

Expungatur Binarius e numero facierum, ita ut numerus facierum redigatur ad p , tunc erit numerus casuum quibus A Monadem semel vel pluries, tentaminibus numero n jacere possit, $p^n - p - 1^n$.

Ergo, jam restituto Binario, numerus casuum quibus A Monadem & Binarium jacere possit est differentia precedentium casuum, nimirum $p - 1^n - 2p^n + p - 1^n$.

Expungatur nunc Ternarius, tum erit numerus casuum quibus A Monadem & Binarium jacere possit $p^n - 2 \times p - 1^n + p - 2^n$.

Ergo jam restituto Ternario, numerus casuum quibus A Monadem, Binarium & Ternarium jacere possit, reperietur esse $p - 1^n - 3 \times p - 1^n - p - 2^n$. & sic deinceps de ceteris.

Scribantur ergo ordine potestates omnes (mutatis alternatim signis) $p - 1^n - p^n + p - 1^n - p - 2^n + p - 3^n$ &c. quibus praefigantur Coefficientes potestatis designatae per f , quo facto, summa terminorum erit numerator expectationis ipsius A , cujus denominator erit $p - 1^n$.

Quia etiam Problema superioris inversum a me fuerat solum, cujus solutionem lectoribus non injucundam fore confido, quamque idcirco hic subijciam.

PROBLEMA V. Superioris inversum.

Invenire quotiens tentaminibus futurum sit probabile ut Collissum alter A facies quasunque datas jactus sit, Tessera constante ex dato facierum numero.

SOLUTIO.

Sit ut antea $p - 1$ numerus facierum in Tessera, f numerus facierum datus, n numerus tentaminum quaesitus; pone $\log. \frac{1 - f^{\frac{1}{n}}}{1 - f^{\frac{1}{2}}} = a$,

itemque $\log. \frac{p - 1}{p} = b$, tunc erit $n = \frac{a}{b}$ prope.

DEMONSTRATIO.

Si numerus facierum quas jaci oporteat sit b , expectatio ipsius A erit

$$p - 1$$

$$\frac{p+1^{10}-6p^2+15 \times p-1^{10}-20 \times p-2^{10}+15 \times p-3^{10}-6 \times p-4^{10}+p-5^{10}}{p+1^{10}}.$$

Fingantur termini $p+1$, p , $p-1$, $p-2$ &c. esse in progressionem geometricam, quod quidem a vero non multum aberrabit, si p ad 1 habuerit rationem satis magnam, pone $\frac{p^n}{p+1^n} = \frac{1}{r^n}$, ergo Expectatio

$$\text{ipſius } A \text{ erit } 1 - \frac{6}{r^n} + \frac{15}{r^{2n}} - \frac{20}{r^{3n}} + \frac{15}{r^{4n}} - \frac{6}{r^{5n}} + \frac{1}{r^{6n}} = \frac{1}{2}.$$

Extrahatur utrinque radix sexta, hinc fiet $1 - \frac{1}{r^n} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ est igitur

$$r^n = \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}}, \text{ pone jam } \log. r = b, \text{ \& } \log. \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = a, \text{ tunc}$$

erit $nb = a$, adeoque $n = \frac{a}{b}$, & eadem erit demonstratio de ceteris casibus.

EXEMPLUM I.

Invenire quotenis jactibus vulgaris tessera futurum sit probabile ut A facies omnes jactat.

$$\log. \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \log. \frac{6}{5} = 0.0791812, \text{ est igitur}$$

$$n = \frac{0.9621753}{0.0791812} = 12 + \mathcal{E}c. \text{ ergo concludere jam licet numerum jactuum quaesitum esse 12 circiter.}$$

EXEMPLUM II.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut A , tessera faciebus 216 constante, facies sex datas jactat, sive ut tribus tessera vulgaribus Terniones omnes jactat

$$\log. \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \log. \frac{216}{243} = 0.0020152, \text{ ergo}$$

$$n = \frac{0.9621753}{0.0020152} = 477 \text{ prope.}$$

Problema Decimum quintum Libri *de Mensura Sortis* continebat Solutionem ludi quem Galli vocant *une Poulle*, hanc autem Cl. Mon-

Ee

17075

mori nec laudat nec reprehendit, illud tantum modo observat solutionem hujus Problematis non quidem in libro suo confectam, extitisse tamen in Epistola a se ad Cl. Nic. Bernoulli missa, 1^a Apr. 1711; mox subiungit, Methodus serierum infinitarum a *Maioræ* ad hanc solutionem adhibita, facile ad tres Collusores accommodari potest, at vero si plures sint, ostendi eam prorsus inutilem evasuram; sed paucis post mensibus quam hæc scripserat fuerant, in lucem prodit Methodus id conficiendi ope serierum infinitarum quam casus omnes hujus Problematis pertingere ostendi; hæc vero videre licet in *Actis Philosophicis* pro Mensibus Octob. Nov. Decemb. 1714, ubi alia solutio ejusdem Problematis ab eximio Mathematico D. Nic. Bernoulli exhibita fuit.

Problema octavum ita fuerat explicatum ut ex casu particulari atque in exemplum allato non difficile fuerit Methodum solutionis generalem colligere; cum vero hæc Methodus non incommode caruerit, quippe quæ tentaminibus fuerit obnoxia, quod quidem Cl. *Monterio* non placuerat, quamquam ipse, ut falsus est, eandem præsentare viam coactus fuerit, hanc idcirco novam excogitavi quam in sequenti Problemate tradam.

PROBLEMA VI.

Tot Collusores quot quis voluerit, A, B, C, &c. quarum dexteritates a, b, c, &c. sint in ratione data, ea conditione ludant ut qui primus datum ludorum numerum vicerit, totum depositum auferat, tum post ludos aliquot peractos, desint ipsi A ludi p quominus victor evadat, ipsi B ludi q, ipsi C ludi r; requiruntur sortes singulorum, ac primum ipsius A.

SOLUTIO.

- 1^o. Scribatur Unitas.
- 2^o. Scribantur literæ singulæ quibus dexteritates denotantur, ea excepta quæ respicit Collusorem illum cuius expectatio primum requiritur.
- 3^o. Scribantur Combinationes binæ, ternæ, quaternæ, &c. literarum omnium, eadem litera semper excepta.
- 4^o. Ex his Combinationibus, eæ perpetuo rejiciantur quibus id designatur vel B vicisse ludos q, vel C ludo r &c. quos ipsi B, C, &c. agillatim desiderant.

5^o. Mul-

fuit in libro meo,* formula vero solutionis quam Autor attulit eadem est atque mea.

Problema autem istud quintum tale erat.

P R O B L E M A VII.

Si sint casus a quibus singulis tentaminibus eventus aliquis contingere possit, & casus b quibus possit non-continere, invenire quotenis tentaminibus futurum sit aequae probabile ut Eventus ille contingat ac ut non-contingat.

S O L U T I O.

Sit x numerus tentaminum quaestus, ergo per jam demonstrata, erit $\frac{a+b^x}{a+b^x} - b^x = b^x$, sive $\frac{a+b^x}{a+b^x} = 2b^x$, est igitur $x = \frac{\log. 2}{\log. a+b - \log. b}$

Insuper si resumatur Aequatio $\frac{a+b^x}{a+b^x} = 2b^x$, atque ponatur $a, b :: 1$, q , tunc Aequatio in hanc migrabit $1 + \frac{1}{q} = 2$, attollatur $1 + \frac{1}{q}$ ad potestatem x ope Theorematis Newtoniani; hinc fiet

$$1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3q^2} \text{ &c.} = 2. \text{ In hac Aequa-}$$

tione si sit $q=1$, erit $x=1$; si sit q infinita, erit x infinita; pone x infinitam, tum Aequatio superior evadet,

$$1 + \frac{x}{q} + \frac{xx}{2q} + \frac{x^3}{6q^2} \text{ &c.} = 2, \text{ sed numerus ille quem exprimit}$$

Series $1 + \frac{x}{q} + \frac{xx}{2q} + \frac{x^3}{6q^2} \text{ &c.}$ habet logarithmum Hyperbolicum;

$\frac{x}{q}$, quod quidem Geometris est notissimum; est igitur $\frac{x}{q} = \log. 2$,

sed logarithmus hyperbolicus numeri 2 est $\frac{7}{10}$ proxime, adeoque

$$\frac{x}{q} = \frac{7}{10} \text{ proxime.}$$

Ergo ubi q est $= 1$, eodem tempore est $x = q$; at ubi q est infinita, est $x = \frac{7}{10} q$ proxime.

Jam

* Vid. pag. 180, 181, 182 primæ Editionis, & pag. 228, 229, 230, 231, 232 secundæ.

Jam ergo definitivus limites arctissimos inter quos ratio x ad q consistit: etenim ratio illa orditur ab aequalitate; & cum in infinitum est protracta, definit tandem in ratione 7 ad 10 proxime.

Atque talis fuit ratio mea solvendi Problematis istius quinti, quæ hoc habet commodi, ut siue logarithmos adhibere malis, siue multiplicatione perfacili contentus sis, ad scopum propositum satis prope accedas.

Exempla quadam attuleram quibus veritas conclusionis meæ comprobaretur, hæc autem erant.

E X E M P L U M I.

Invenire quotenis tentaminibus possit quis æqua forte id in se suscipere, ut duabus tesseris duas Monades jaciat.

S O L U T I O.

Quoniam est casus unicus quo Monades ambæ jaciuntur, & casus 35 quibus non jaciuntur, erit idcirco $q = 35$: Multiplicetur itaque 35 per $\frac{7}{10}$, & productum 24.5 indicabit numerum jactuum quæstum fore inter 24 & 25, si vero istud ope logarithmorum conficiatur, numerus jactuum quæstus reperietur 24.605, cujus excessus supra id quod prius repertum fuerat perexigui est momenti; cum vero non dentur fractiones jactuum, solutiones ambæ eadem censerî poterunt.

E X E M P L U M II.

Invenire quotenis tentaminibus id æqua forte suscipi possit, ut tribus tesseris tres Monades jaciuntur.

S O L U T I O.

Quoniam est casus unicus quo Monades tres, tribus tesseris, jaciuntur, casus autem 215 quibus non jaciuntur, erit ideo $q = 35$: quapropter si multiplicetur 213 per $\frac{7}{10}$, productus numerus 150.5 id indicabit, numerum jactuum quæstum fore inter 150 & 151; at vero si nova instituatür operatio, logarithmorum administriculo, reperietur numerus jactuum quæstus fore 149.5 cujus aberratio a numero jactuum supra reperto vix impedit quominus ambæ solutiones eodem recidere judicari possint.

Pro-

aequare fractionem $\frac{1}{2}$, quo facto, numerus terminorum adhibitus indicabit eum tantarum numerum, qui faciat ut aequa forte de contingencia vel non-contingencia Eventus contendere possit; in hanc vero Seriem nullam aliam mutationem inveni quam ut scriberem a & b loco ipsarum p & q .

Sic autem pergit Vir Cl. "Hæc Methodus est simplicissima & vix differt ab ea quam *Huygenius* usurparat ad id determinandam; quotiens jactibus possit quis aequa Sorte contendere ut duabus tesseris, binos senarios jactat; sed utraque hoc habet incommodi, quod neutra possit ad usum accommodari, cum ita accidit ut sit a numerus valde exiguus, & eodem tempore sint m & b numeri permagni, v. g. si ita eveniret ut esset $a=323$, & $b=578633$, proindeque $m=578956$ palam est necesse futurum fore ut plures quam mille termini hujus Seriei adhiberentur, cui præstando vix mille anni sufficerent.

Sed Vir Clarissimus qui tot præclara de Seriebus infinitis protulit, qui tot sibi erepta putavit, tunc temporis non animadvertit Seriem a se allatam esse progressionem geometricam; Equidem ille, postquam huc & illuc se diu versavit, & permultum tædii ipse sibi peperit, singulari artificio in rem tam arduam adhibito, ad hanc conclusionem tandem devenit, summam tot terminorum quot exprimit numerus b , fere $\frac{a}{m-b} = \frac{ab^b}{m^b \times m-b} = 1 - \frac{b^b}{m^b}$.

Sed, si Vir Clarissimus tunc percepisset terminos Binomii ad potestatem quamlibet b evecti, ea facultate esse præditos ut quisque eorum designet numerum casuum quibus eventus, dato ludorum numero, toties se proferat & toties se occultat quoties id exprimitur indicibus quantitarum a & b , huic termino competentium, in tantis difficultates non dilapsus esset, & illico comperisset ultimum terminum Binomii $a+b^b$ ad solutionem desideratam eum adductum fuisse: ut mentem meam aliquanto plenius aperiam, non aliquid erit exemplum hujus rei hoc loco subijcere, v. g. si id requiratur inveniendum quoties accidat ut Eventus aliquis ejus probabilitas contingentiæ sit ad probabilitatem non-contingentiæ, ut a ad b , dato ludorum numero octo, sexies se proferat, & bis se subducatur, terminus ille Binomii $a+b$ ad potestatem octavam evecti, qui talem se proferat ut indices 6 & 2 quantitarum a & b exhibeat, declaratur numerum casuum desideratum; porro terminus $28a^6b^2$ talem se proferat, adeoque numerus casuum desideratus est $28a^6b^2$, numerus autem

autem casuum omnium est $\frac{a+b}{2}$, quo fit ut Fractio $\frac{28ab^2}{a+b^2}$ metia-

tur probabilitatem hujus contingentiae.

Ergo nihil magis requirebatur ad solutionem Problematis *Monnotiani* quam ut ad hunc modum procederetur, nimirum, numerus casuum quibus Eventus, dato ludorum numero b , possit non-contingere est b^b , numerus igitur casuum quibus possit contingere est $\frac{a+b^b-b^b}{a+b^b}$, sed Probabilitates contingentiae & non-contingentiae ponuntur aequales, est igitur $\frac{a+b^b}{a+b^b} = 2b^b$ proindeque est

$$b = \frac{\log. a + b - \log. b}{\log. 2}.$$

Quod hanc proprietatem Binomii tunc temporis Cl. *Mannort* asceverit, id facile evincitur ex Regula ipsi a Cl. *Johanne Bernoulli* tradita quae ista proprietate Binomii continetur; Regula autem his verbis fuerat enunciata. “*Petrus & Paulus* certamen inaequale in-eunt ejus naturae ut numerus casuum *Petro* favorabilium, sit ad numerum casuum favorabilium *Paulo* ut a ad b ; jam post ludos aliquot peractos desint *Petro* ludi p , *Paulo* vero ludi q , quomiu-nus unus aut alter victor evadat, ratio sortium requiritur. Attolle Binomium $a+b$ ad potestatem $p+q-1$, quo facto, dico summam priorum terminorum quorum numerus sit q , esse ad summam posteriorum omnium quorum numerus erit p , ut fors *Petri* ad sortem *Pauli*.

Quod vero memorata proprietates Binomii mihi tunc fuerit nota, id perspicuum est cum ex tenore omnium fere Problematum quae solveram, tum maxime ex principio quod in introductione mea posueram; etenim sic res a me exposita fuerat.

Si Eventus duo tales sint ut neuter ex altero pendeat, hoc est, ut siue unus contigerit, siue non; Probabilitas contingentiae alterius nihil quidquam mutationis inde patiatur, tum sit p numerus casuum quibus eorum alter, quem primum appellare licet, contingere possit, & q numerus casuum quibus possit non-contingere, itemque sit r numerus casuum quibus secundus contingere possit, & s numerus casuum quibus possit non-contingere: multiplicetur $p+q$ per $r+s$; tunc productum ex multiplicatione ortum, nimirum $pr+qr+ps+qs$ erit numerus casuum omnium quibus contingentia & non-contingentia Eventuum inter se variari possunt.

Ergo si A & B ita de Eventibus certent, ut A contendat fore ut uerque contingat, ratio sortium erit ut pr ad $qr+ps+qs$; etenim cum

gentiam secundi, & vicissim productam xy contingantiam secundi, & non contingentiam primi, id mihi sensu innotuisse necesse est. producta bina $xy + xpy$ seu $2xy$ res antedictas etiam denotans, cum ita acciderit ut p & r fuerint inter se aequales, itemque q & s ; necesse fuit ut id mihi perspectum foret, coefficientem 2 istius producti $2xy$ apponendam fuisse quod ea denotaret istas permutationes ordinum xy & qx ; necesse fuit ut illud perciperem quod posito $2, 5$. numero eventuum aequalium octo, tunc futurum esset ut numerus casuum quibus Eventus sexies se preberet, & his se subduceret, designaretur termino illo octavae potestate in quo Indices 6 & 2 reperirentur, nempe $28p^6q^2$; ac fortasse nesciveram huius termini coefficientem, nimirum 28 , designaturam numerum permutationum quales littere p, p, p, p, p, p, q, q , productam p^6q^2 coefficientes habire possint; immo vero, hoc jam diu mihi erat exploratum, etenim ego fortasse primus omnium detexi coefficientes antedictas productis binis illis, vel Multinomi cuiuscunque, id denotare quatenus variationibus litterarum producti possibiles suas inter se permutent: sed utrum illud facile fuerit ad inveniendum, postquam lex coefficientiarum ex productis continuis $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6}$ &c. jam perspecta esset, aut quicquam ante me hoc ipsum detexerit, ad rem presentem non negavi intercessi, cum id monere suffecerit hanc proprietatem Coefficientiarum a me assertam fuisse & demonstratam in *Actis Philosophici Anno 1697* impressis.

Ut vero quæ supersunt dicenda paucis complectar, rem etiam quæ jam dicta sunt summam astringam, libet ea oculis subnectere ad hunc modum.

Problema primum *Traetus de Mensura Sortis* a *D. Mammert* non fuerat generaliter solutum, illius tamen solutionem generalem ad *D. Joh. Bernoulli* a se missam fuisse dixit; melius fortasse dixisset remissam.

Problema secundum ab eo solutum quidem fuerat, sed ad casus particulares restrictum.

Problema 3^{um} *Vir Cl. non solverat*.

Problema 4^{um} non solverat.

De Lemmate nostro jam vidimus quid juris in illud habuerit.

De Probl. 5^o, 6^o, 7^o, jam dictum est; interim factus est tabellam limitum quam iis adjuveram ingeniose fuisse excogitam.

De Novo jam vidimus quæ methode illud a *Cl. Viro* solutum fuerit.

De

De Decimo maluit tacere.

De Undecimo jam diximus.

Prob. 13^{um} erat *Huygenianum* a me facillime & generaliter solutum ope *Prograssionis geometricae*.

Prob. 14^{ma} propositum fuerat ad *Eugeni* cuius mentem D. Mon-
sieur non erat affectus.

Probl. 15^{um} non habuit, illincamen solutionem Vir Cl. postea re-
condidit in Epistola ad Cl. Nic. Bernoulli missa: ceterum id sibi liqui-
do conficit casus huius Problematis aliores, per Series infinitas solvi
non posse, ac vero id fieri potuisse offendimus in *Aetis Philosophici*
N^o 341.

Probl. 16 & 17. falsus est se non habuisse.

Prob. 18^{um} credidit se habuisse, donec monitus, fuerit non ita fuisse.

Prob. 19^{um} inversum scilicet proximi antecedentia non possit habere

Problemata sex deinceps insequentia quæ finem Tractatus facie-
bas, quæque Durationem Ludorum spectabant nondum habueras,
ex his vero unum in secunda Editione sua sibi sumperas solvendum,
quod, autem in hac re præstiteras fuerat a me maxima cum laude
memoratum, nec hic constitueram, etenim cum Vir Cl. ad solutionem
suam plures Series adhibuisset, unaqueque earum sic fuerat a me ex-
posita, adeo ab omni ambiguitate liberata, ita cuiusque Series functio
definita fuerat, ita diligenter cautum fuerat ne sortes Collatorum
& sortes spectatorum inter se miscerentur, ut cuius hæc perpendenti
facile constabit me Cl. viro aliquando plusquam meras laudes tri-
buisse,

Cum Problema sequens, cujus prima pars in Editione anglica libri nostri jam soluta fuerat continet casum sortis satis notabilem, tum etiam habeat solutionem non adeo vulgarem, nec difficultate carentem, illud prioribus adungere visum est.

PROBLEMA VII.

Collatores aliquot A, B, C, D, E, &c. quorum numerus sit
tribus, reseris ludant ea conditione, ut si quis eorum ternis
actibus plura omnino puncta quam reliquorum ullus jecerit, is de-
positum totum auferat, ita tandem ut si eorum duo, vel plures
eandem pluresque numerum jecerint, majorem tamen numero pun-
torum quodam reliquorum ullus jecerit, is depositum totum inter se
Ff 2
equa-

equaliter partiantur, vel denno ludum integrent, exclusis cæteris Collusoribus qui depositum quique suum amittunt, jam vero postquam A jactus suos insinuerit, queritur 1^o quam probabile futurum sit ut cæteros vincat, & quantum debeat esse is Collusorum numerus quo efficiatur ut Expectatio ipsius A parior futura sit quam si plures vel punctatos fuissent Collusores.

S O L U T I O 1^a Paris.

1^o. Sit l Punctorum numerus quem A jecerit; 2^o sit m numerus casuum quibus evenire possit ut Puncta l jactantur, hinc erit m numerus idem casuum quibus ad aequalitatem perveniri possit; 3^o sit a numerus designans summam casuum omnium quibus Puncta inferiora $l-1, l-2, l-3, \dots$ jacti possint, hinc fiet ut a idem sit designaturus numerum casuum quibus A unum quemlibet ex Collusoribus cæteris $B, C, D, \dots$ vincere possit; 4^o sit b summa casuum omnium quibus Puncta superiora $l+1, l+2, l+3, \dots$ jacti possint; postremo sit $s = b + m + a$. His positis Probabilitas ejus conringentie quæ faciat ut A Collusores cæteros vincat, exprimeretur per fractionem $\frac{a + m^b - a^b}{m \times s - 1}$, adeoque si singuli deponant summam 1 , Expectatio ipsius A in totum depositum p erit $\frac{a + m^b - a^b}{m \times s - 1}$, sive, quod eodem recidit, tuncum ipseus A æstimandum erit ex quantitate

$$\frac{a + m^b - a^b}{m \times s - 1} - 1.$$

S O L U T I O 2^a Paris.

Sit $\log. s = \log. a = g$, itemque sit $\log. s - \log. a + m = f$. quibus positis, numerus ille Collusorum qui possibillam ipsius A conditionem

$$\text{constituat, exprimeretur fractione } \frac{\log s - \log f}{\log a + m - \log a}.$$

C O R O L L A R I U M I

Si A fortitus fuerit altissimum Punctum; quæ major evadet Collusorum numerus, eò major fiet accessio ipsius Lucro; quantumvis ta-

men futurus 6i Collusorum numerus, necum illud nunquam positus
attinget quantitatem 63 modum quo se totum apud 63, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

INVESTIGATIO 1^a Partis.

1^o. Postquam *A* iactus suos instituerit, Probabilitas id eveniendi
ut *B* deterioreni aequatur forem erit $\frac{1}{2}$; Probabilitas igitur ut sin-
guli *B*, *C*, *D*, *E*, &c, quorum numerus est $p-1$, ab ipso *A* vincan-
tur antequam eorum ullus ad aequalitatem perveniat, erit $\frac{a^{p-1}}{p-1}$.

II^o. Probabilitas ut Collusor *B* speciatim designatus ad aequalita-
tem perveniat est $\frac{m}{p}$; quo posito, Probabilitas ut Collusores ceteri
quorum numerus est $p-2$ ab ipso *A* vincantur, nec eorum ullus ad
aequalitatem perveniat, est $\frac{a^{p-2}}{p-2}$; quo etiam posito Probabilitas ut *A*,
novo certamine inito cum *B*, eum vincat, erit $\frac{1}{2}$, Probabilitas igitur
contingentiae horum omnium est $\frac{m}{p} \times \frac{a^{p-2}}{p-2} \times \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} m a^{p-2}}{p-2}$, sed nu-
merus Collusorum praeter *A* est $p-1$; adeoque Probabilitas ut unus,
quilibet ex iis Collusoribus ad aequalitatem perveniat, tum ut reli-
qui vincantur ab *A*, deinde ut Collusor ille qui ad aequalitatem per-
venerat ipse vincatur, erit $\frac{\frac{1}{2} m a^{p-2}}{p-1}$.

III^o. Probabilitas ut Collusores *B* & *C*, speciatim designati, ad ae-
qualitatem cum *A* perveniant est $\frac{m^2}{p}$; quo posito, Probabilitas ut Col-
lusores ceteri quorum numerus est $p-3$, ab ipso *A* vincantur, nullo
eorum interea ad aequalitatem perveniente, est $\frac{a^{p-3}}{p-3}$; quo etiam po-
sito, Probabilitas ut *A* novo certamine inito cum *B* & *C* horum ut-
rumque vincat, est $\frac{1}{2}$; Probabilitas igitur contingentiae horum omni-
um erit $\frac{m^2}{p} \times \frac{a^{p-3}}{p-3} \times \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} m^2 a^{p-3}}{p-3}$; sed numerus variationum quib-

bis Collusores quilibet bini ex multitudine $p-1$ eligi possunt, est $\frac{p-1}{1} \times \frac{p-2}{2}$, Probabilitas igitur ut duo quilibet Collusores, nec plures, ad aequalitatem perveniant, tum ut reliqui ab ipso A vincantur, deinde ut Collusores ii qui ad aequalitatem pervenerant ipsi vincantur, erit $\frac{\frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} m^2 a^{p-3}}{p-1}$, & sic deinceps in infinitum.

Ex his igitur colligere licet mensuram Probabilitatis id evenientis ut A Collusores reliquos omnes vincat, expressum iri per subjunctam Seriem

$$a^{p-1} + \frac{p-1}{2} m a^{p-2} + \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} m^2 a^{p-3} + \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} \times \frac{p-3}{3} m^3 a^{p-4} \text{ &c.}$$

$$\frac{p-1}{p-1}$$

Jam vero ex inspectione Seriei superscripae, statim id percipitur eam originem suam ducere a Binomio $a + m^p - 1$ methodo *Newtoniana* in Seriem expanso, singulis hujus Seriei terminis ordine divisis per progressionem arithmeticam, 1, 2, 3, 4, &c.

Quapropter si instituatür Aequatio inter Binomium istud $a + m^p - 1$ & valorem ejus in Seriem expansum, nimirum

$$a^{p-1} + \frac{p-1}{1} m a^{p-2} + \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} m^2 a^{p-3} + \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} \times \frac{p-3}{3} m^3 a^{p-4} \text{ &c.}$$

tunc Series designans eam Probabilitatem quam Problema requirit, nullo fere negotio ad expressionem finitam redigetur ope facili *Quadraturae*.

Etenim si tractetur quantitas m perinde ac si esset indeterminata, Area Curvae cujus ordinatim applicata est Binomium $a + m^p - 1$ &

Abscissa m , reperietur esse $= \frac{a + m^p - a^p}{p}$, Area vero Curvae cujus or-

dinatim applicata est Series Binomio aequalis, & abscissa m , reperietur esse $a^{p-1} m + \frac{p-1}{2} m^2 m a^{p-2} + \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{2} m^3 m a^{p-3} \text{ &c.}$ sed prior Area aequalis est posteriori, quapropter si fiat divisio utriusque per $m a^{p-3}$,

proditur quantitas $\frac{a + m^p - a^p}{m^p p - 1}$ aequalis Seriei qua Probabilitas requisi-

sita designata fuerat:

Porro, cum Expectatio cujusque Collusoris sit in ratione composita ex Probabilitate quam is habet ceteros vincendi, & ex summa quam sit

est ostenturus si vicinit, cumque summa deponatur inter omnes. Collatores sit p , sequitur Expectationem ipsius M esse $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}$, sed M ipse deposuerat summam 1, quapropter luctum ejus aestimandum est ex quantitate $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} - 1$, *Q. E. T.*

INVESTIGATIO H. Partis.

Cum Quantitas $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} - 1$ qua luctum ipsius M designatur sequenda sit *Maximo*, perspicuum est quantitatem $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}$ etiamnum sequendum esse *Maximo*, nimirum propter quantitates datas *m* & *1*.

At ex Methodo de Maximis & Minimis, id notum est, si fractio sequenda sit *Maximo*, tum debere constitui aequalitatem inter Fluxionem Numeratoris ductam in Denominatorem, & Fluxionem Denominatoris ductam in Numeratorem; quapropter si Fluxio denotetur symbolo F ; habebimus hanc Aequationem

$$F: \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = F: \frac{m^1p-1}{m^1p-1} \times \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}; \text{ porro sit } \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = x$$

erit igitur $p \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = \log. x$, sumptisque Fluxionibus erit

$$p \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = \frac{x}{x}, \text{ sive } x p \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = x, \text{ sive } \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} p \times \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = x;$$

sed x est Fluxio quantitatis x quam posuimus aequalem quantitati $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}$, adeoque Fluxio quantitatis $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}$ erit aequalis quantitati $\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} p \times \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1}$, eodem procedendi modo, reperietur Fluxio quantitatis a^2 aequalis esse quantitati $a^2 p \times \log. a$, itemque Fluxio quantitatis p^{1-1} aequalis quantitati $p^{1-1} p \log. p$, quibus positis, in hanc devenimus aequationem, nimirum

$$\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} p \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} - a^2 p \log. a \times p^{1-1} = p^{1-1} p \log. p \times \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} \text{ cujus}$$

si pars utraque dividatur per $p^{1-1} p$, prodibit aequatio

$$\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} \log. p, \text{ sive}$$

$$\frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} \times \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = a^2 \times \log. p - \log. a, \text{ sit } \log. p - \log. a = g, \text{ unde emergit nova Aequatio logarithmica, nimirum } p \log. \frac{a+m^1p-a^2}{m^1p-1} = p \log. p.$$

$p \log. a + \log. g$, five $p \log. a + m - p \log. a = \log. g = \log. f$ quo fit
 ut p fit = $\frac{\log. g - \log. f}{\log. a + m - \log. a}$ *E. I.*

A D M O N I T I O.

Si Collutores hoc pactum inean, ut jactus illi soli censcantur utiles qui facies binas ternasve similes admiserint, tunc Problema superius refertur ad ludum vulgo dictum *Raffing*, Gallice *le jeu des trois Raffes*, cui solvendo inferret Tabula inferius subiecta quæ ad sortem duorum Collutorum designandam primitus constructa fuerat a Nôb. Viro D. *Françisco Robartes* viginti amplius ante annos quam D. *Monmort*, Liber in lucem prodiret.

Puncta	Casus ad vin- cendum	Casus ad æqua- litatem	Casus ad vin- cendum	Puncta
LIV	884735	1	0	IX
LIII	884726	9	5	X
LII	884681	45	55	XI
LI	884534	147	202	XII
L	884165	369	571	XIII
XLIX	883400	765	1336	XIV
XLVIII	881954	1446	2782	XV
XLVII	879470	2484	5266	XVI
XLVI	875591	3969	9235	XVII
XLV	869632	5869	15194	XVIII
XLIV	861199	8433	23537	XIX
XLIII	849706	11493	35030	XX
XLII	834679	15927	50057	XXI
XL I	815392	19287	69344	XXII
XLI	791506	23886	93230	XXIII
XXXIX	762838	28668	121898	XXIV
XXXVIII	728971	33867	155765	XXV
XXXVII	690100	38871	194036	XXVI
XXXVI	646929	43171	237807	XXVII
XXXV	599472	47457	285264	XXVIII
XXXIV	548865	50607	335871	XXIX
XXXIII	496314	52551	388422	XXX
XXXII	442368	53946		XXXI

442368

$$f = 884736 = 96^3$$

Nu-

Log. $f - \log. a = 0.0483594 = g$, $\log. f - \log. a + m = 0.0354471 = f$,
 sed $\log. g - \log. f = 0.1349014$, & $\log. a + m - \log. a = 0.0129123$,
 erit igitur numerus Collusorum requisitus $= \frac{1349014}{129123} = 10.4$ prope,
 eum vero non dentur fractiones hominum, tum quod quantitates circa
Maxima versantes proxime ad aequalitatem accedant, pro numero il-
 lo poterit subijci vel 10, vel 11, lucrum vero ipsius A in utrobique
 casu erit 3.2 prope.

Si Punctorum numerus quem A jecerit sit xlv, illius maxima ex-
 pectatio non citius eveniet quam numerus Collusorum futurus sit om-
 nino 73, quo in casu lucrum erit 26.128.

Ac vero si Punctorum numerus quem A jecerit sit liv, quo ma-
 jor non datur; tunc, cum sit $m = v$, atque $f = a + 1$, hinc fiet ut ejus

$$\text{Lucrum futurum sit} = \frac{a + 1^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}}}{a + 1^{\frac{1}{p}} - 1} = 1 = a + 1 = \frac{a^{\frac{1}{p}}}{a + 1^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$= a \frac{a^{\frac{1}{p}}}{a + 1^{\frac{1}{p}} - 1} = a \times 1 = \frac{a^{\frac{1}{p}} - 1}{a + 1^{\frac{1}{p}} - 1}; \text{ pone numerum } p \text{ infinitum,}$$

tunc Numerator $a^{\frac{1}{p}} - 1$ infinite minor erit Denominatore $a + 1^{\frac{1}{p}} - 1$,
 adeoque fractio $\frac{a^{\frac{1}{p}} - 1}{a + 1^{\frac{1}{p}} - 1}$ evanescet, cui consequens est ut lucrum

ipsius A in hoc casu futurum sit $= a = 884735$.

Ex antedictis perspicuum est solutionem de tribus Telleris ad per-
 varia ac prope infinita ludorum genera transferri posse.

Cum purabam his Problematibus finem imponere, amicus qui-
 dam mecum egit ne id prius facerem quam unum amplius Problema
 caeteris adderem; cujus rei haec fuit occasio, quod cum. sola quae-
 dam hujus libri jam excusa ei legenda dedissem, ille contuendo me be-
 nevole oburgavit quod Solutionem de Summa Terminorum in Bino-
 mio expanso $a + b^{\frac{1}{p}}$ ex Duratione ludorum arcescitans, quam sibi Anno
 1722. impertiveram, praeterire voluissim: ego vero his excusationi-
 bus usus sum, primum quod solutio ista mihi videretur nihilis cir-
 cumscripta, utpote quae suaderet rationem a ad b esse rationem a-
 qualitatis, deinde quod nunquam expertus esset an posset ad usum
 facile accommodari, postremo quod ea quae de Summa Terminorum
 jam erant a me prolata, solutionem satis commodam exhiberent; at
 ille nullam excusationem admittere voluit, nec urgere desiste quin
 ei posticitus esset me Regulam ei tunc temporis traditam in lucem
 emissurum; quapropter ut promissum exsolvam, sequentia exaravi quae
 fortasse fufius aliquando tractabuntur.

PRÆPARATIO.

Collutores duo *A* & *B* inter se pacificantur ne prius ludendi finem faciant quam ludorum numerus *n* sit transactus: adfunt spectatores duo *C* & *D*, quorum *C* contendat id eventurum, fore ut aliquando ante conclusum Certamen, vel expirante Certamine, *A* superaretur sit *B* dato ludorum numero *p*, vel *B* superaturus sit *A* eodem ipso ludorum numero, *D* vero contendat neutrum eventurum fore; adfunt etiam Spectatores duo alii *E* & *F* quorum *E* contendat illud utrumque eventurum, tum ut Collutorum alter aliquando superaturus sit alterum ludorum numero *p*, tum ut Collutor ille qui perdidit, non solum iacturam suam sit recuperaturus, sed etiam sit postea superaturus alterum, hoc ipso ludorum numero vel maiori, *F* vero neget illud utrumque eventurum. Designentur Probabilitates quas spectatores habent adversarium quisque suum vincendi per quantitates *c*, *d*, *e*, *f*, quibus positis ad solutionem de summa Terminorum accedere liceat.

PROBLEMA IX.

In Serie expansa Binomii $1 + x$ *ad potestatem parem* *n* *evecti*, *invenire rationem mediorum Terminorum, quorum numerus sit* *p*, *ad Summam Terminorum omnium.*

Ne quis vero sic ambiguiaci locus, Terminos medios intelligo tum Terminum medium, tum reliquos omnes quorum binus quique a medio equaliter distant, ita ut multitudine Terminorum, ab utraque parte Termini medi consistentium, sit $\frac{n-1}{2}$, posito scilicet *p* numero impari.

SOLUTIO.

Ratio quaesita est $\frac{1}{2} d + \frac{1}{2} f$ accurate.

Porro quantitas *d* datur ex Prob. IV. lib. IV. quantitas vero *f* equalis fere est Probabilitati fore ut illud non eveniat, nimirum ut Collutorum alteruter alterum sit superaturus ludis *3p*, datur igitur proportionem ratio Terminorum mediorum, quorum numerus sit *p*, ad summam Terminorum omnium.

Illud observandum est quod si numerus *p* sit magnus, difficile admodum futurum sit ut Collutores ambo possint in hanc sortem incidere

cidere quam designavimus, quantitate e , etenim si quantitas $3p$ vel tantulum superet indicem n potestatis date, res omnino fieri non poterit; fac nunc ita esse ut numerus p sit magnus, quantitas igitur designata per e tanquam nihilo equalis spectari poterit, quo fieri ut f futura sit equalis unitati, adeoque ratio quaesita satis bene exprimeretur per $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}$, five per $\frac{d+1}{2}$.

Quamvis autem, si in id incidit ut quantitas p tanta sit ut adaeque vigesimam partem quantitatis n , vix futurum sit necesse ut res accuratius designatur quam quomodo a nobis factum est, attamen lubet rem paululum dilatare.

Sint igitur d, f, b, l , Probabilitates fore ut illud non eveniat nempe ut Collusorum alter alterum sit superaturus ludis $p, 3p, 5p, 7p$; tunc ratio quaesita erit $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}l$ proxime, huius autem Formulae demonstratio nititur in iis quae habuimus in Prob. 25 & 26 Tractatus de *Mensura Sortis*, vel in Prob. 40 & 41 Editionis anglicae, tum etiam in pag. 110. ejusdem Editionis.

Cum vero quantitates d, f, b , determinentur subsidio Tabulae sinuum rectorum & sinuum versorum, commodum erit transferre sinus versos ad sinus rectos dimidiorum Arcuum, ut istud ante motueramus ad Prob. IV. Lib. IV. quamobrem ut quantitates illae d, f, b , quam facile fieri possit obtineantur, hanc subijciemus Regulam.

Sit n numerus Ludorum quos Collusores transigere stantur priusquam ludo desistant, p Ludorum numerus de quo Spectatores contendant, sic A semicircumferentia Circuli ad Radium 1, sumantur sinus Arcuum $\frac{A}{n}, \frac{3A}{n}, \frac{5A}{n}, \frac{7A}{n}$ &c. donec semicircumferentia exhaustiatur; sint S, T, V, X , &c. sinus recti istorum Arcuum, sint praeterea s, t, v, x &c. sinus recti eorumdem Arcuum dimidiorum, tunc Probabilitas fore ut neuter Collusorum alterum sit superaturus ludis p , designabitur ad hunc modum.

$$\frac{S^{n+1}}{\sqrt{n+2 \times 2^n p}} - \frac{T^{n+1}}{t^{n+2 \times 2^n p}} + \frac{V^{n+1}}{v^{n+2 \times 2^n p}} - \frac{X^{n+1}}{x^{n+2 \times 2^n p}} \text{ &c. sic sit } n =$$

900, $p=45$, tunc terminus primus hujus Series, caeteris exclusis, definiret Probabilitatem fore ut neuter Collusorum alterum superaturus sit ludis p , jam terminus ille numeris expressus est .7354 prope, cui si addatur Unitas, summa erit 1.7354, cujus pars dimidia, numerum .8677, satis prope accedet ad eam rationem quam termini quadraginta quinque medii potestatis expansae $1 + 1^{900}$ habent ad summam

nam terminorum omnium ; at si sumantur termini duo primi ejusdem Seriei, Probabilitas illa quam Series requirit invenietur esse .7324 cui si addatur Unitas, summa erit 1.7324 cujus dimidia pars .8662 consentit ad tres figuras cum vera ratione.

Si ratio a ad b non sit equalitatis, modo tamen existat infra rationem numeri binarii ad Unitatem, ratio quam termini circa maximum versantes, in potestate expansæ $a + b^n$, habent ad ipsam potestatem $a + b^n$, non multum discrepabit ab ea ratione quam totidem termini potestatis expansæ $1 + 1^n$, circa medium versantes, habent ad potestatem 2^n .





LIBER VIII.

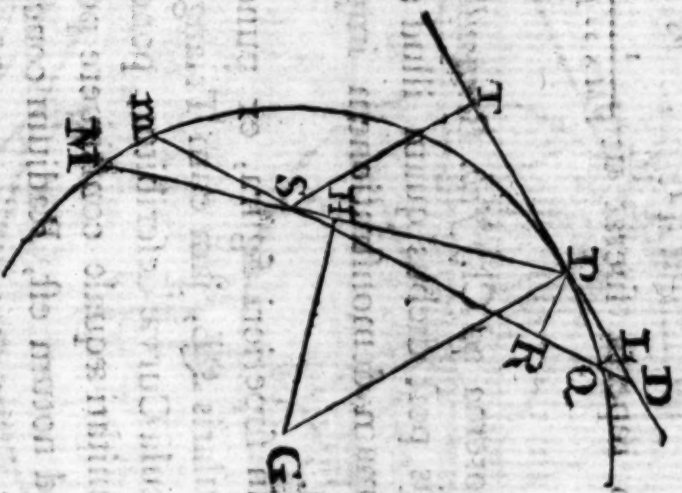
*De Viribus Centripetis, itemque de maximis & minimis
mutationibus quæ in motu Corporum Caelestium occurrunt,
Disquisitio Geometrica.*

ANNO 1705, Theorema quoddam generale inveneram cu-
jus ope leges virium Centripetarum, in Curvis quibilibet
datis, aliquanto facilius quam per Methodos vulgo adhi-
bitas consequi liceret; etenim summa rei huc redibat ut
Radius Concavitatis Curvæ cujuscunque datæ desineretur,
Tangenſque ad Curvam duceretur, de quorum utroque Regulæ a
Doctissimis Viris jam traditæ fuerant: ergo cum ad casus aliquot sim-
plices hanc contemplationem adjunxissem, eamque comperissem ad
usum maxime accommodatam, paucis post annis in animum indu-
xeram experiiri num vires centripetæ, in conicis sectionibus, expeditius
ex natura focorum deduci poterant quam ex Aequationibus quibus
relatio inter abscissas & ordinatas vulgo determinatur; quam ob cau-
sam calculum institueram de magnitudine linearum præcipuarum
quæ in his figuris ponuntur, earum expressione perpetuo revocata
ad lineas e focus educas, & in idem Curvæ punctum concurrentes:
has vero lineas omnes in Tabulam contuleram quam viris Doctissi-
mis mihiq; amicitia conjunctissimis D^{nis} *Halley, Machin, Jones,*
Colson imperiveram. Inter proprietates conicarum sectionum quas
ex natura Focorum ad hunc modum elicueram, quadam novæ re-
pertæ fuerant, eaque mira simplicitate gaudentes, quibus hæc sequens
annumerari potest, scilicet, Rectangulum sub lineis e focus educ-
tis & in idem punctum circumferentiæ concurrentibus, æquale est qua-
drato ejus semidiametri quæ parallela est Tangenti per punctum da-
tum ductæ; talium Theorematum adminiculo, facillima mihi pa-
tuerat Constructio Orbicularum quas Corpora in eis revolutentia descri-
bunt, posita lege vis Centripetæ reciproce proportionali quadrato di-
stantiæ.

Ex eo tempore quo primum hæc mihi perspecta fuerant usque dum evulgarentur, spatium satis magnum intercesserat, donec Cl. *Hallens* mihi autor esset ut ea in *Actis Philosophicis* inferenda eaderem, quod quidem factum fuerat Anno 1717; cum vero Viximus variis temporibus Problemata quadam astronomica mihi proposuisset de *Maximis* & *Minimis* quæ in motibus celestibus occurrunt, quorum aliqua jam edita fuerunt, investigatione tamen prætermissa, alia vero iis anteriora nunquam lucem viderunt, non aliter enim fore duxi hæc in unum collecta aliquanto fufius exponere.

CAPUT I.

Theorema generale de viribus Centrifugis



DE MONSTRATIO.

Sumatur punctum $\mathcal{Q}$ puncto P infinite vicinum, tum ducatur recta $S\mathcal{Q}$ quæ secet tangentem in D , deinde centro S , intervallo SP describatur Arcus PR secans $S\mathcal{Q}$ in R ; præterea, ex Centro Concavitas G demittatur in SP perpendicularis GH ; postremo eodem centro G , intervallo GP describatur circulus Mm secans PS in M : his positis, cum ex *Newtoni* principiis constet vim centripetam esse proportionalem quantitati $\frac{D\mathcal{Q}}{s\mathcal{Q} \times PR}$, cumque sit $P\mathcal{Q}$ ad PR ut $S\mathcal{Q}$ ad ST , perspicuum est vim centripetam esse ut $\frac{D\mathcal{Q}}{p\mathcal{Q}q \times STq}$; sed ex proprietate circuli per P & M transeuntis, est $P\mathcal{Q} = D\mathcal{Q} \times PM$; est igitur vis centripeta ut $\frac{1}{pM \times STq}$, sive ut $\frac{1}{pH \times STq}$, sed $PH, PG :: ST, PS$, quare est $PH = \frac{PG \times ST}{PS}$. Sive $PH \times STq = \frac{PG \times ST \text{ Cub}}{PS}$, proindeque vis centripeta quæ modo reperta fuerat ut $\frac{1}{pM \times STq}$, nunc evadet ut

$$\frac{PS}{PG \times ST \text{ Cub.}}$$

Cum Superius Theorema ad Cl. *Job. Bernoulli* sine demonstratione misissem, ille paucis post diebus quam illud acceperat, mihi infra positam elegantissimam demonstrationem impertivit literis datis Basileæ 16^o Feb. 1706.

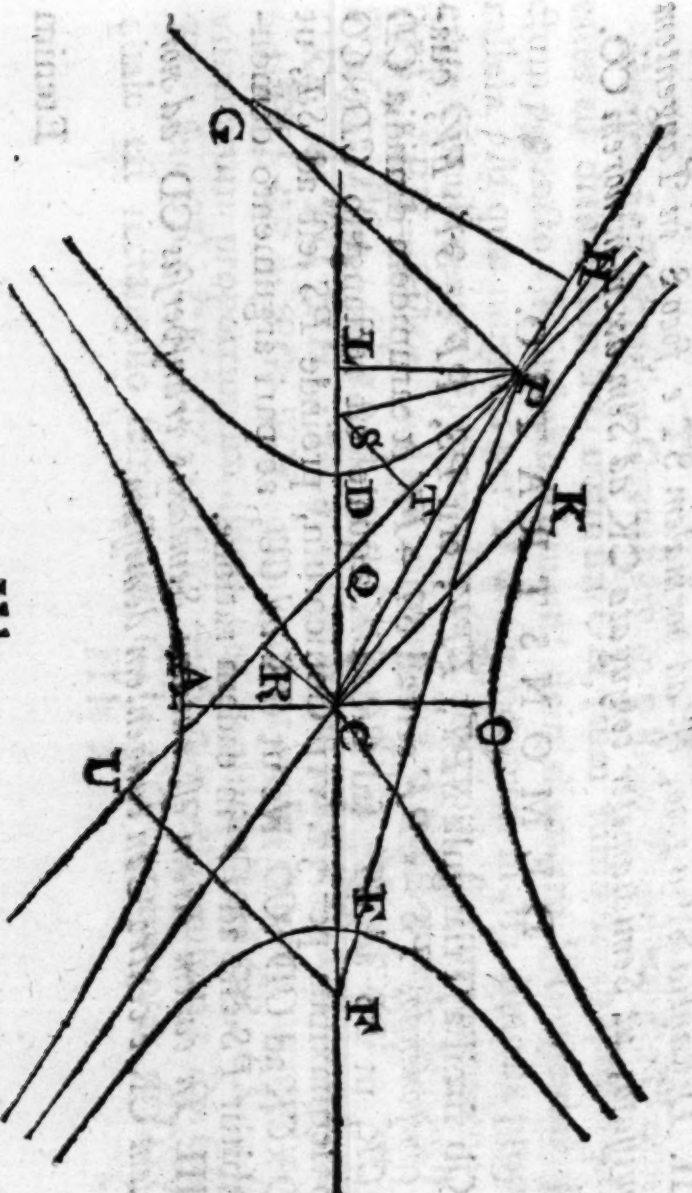
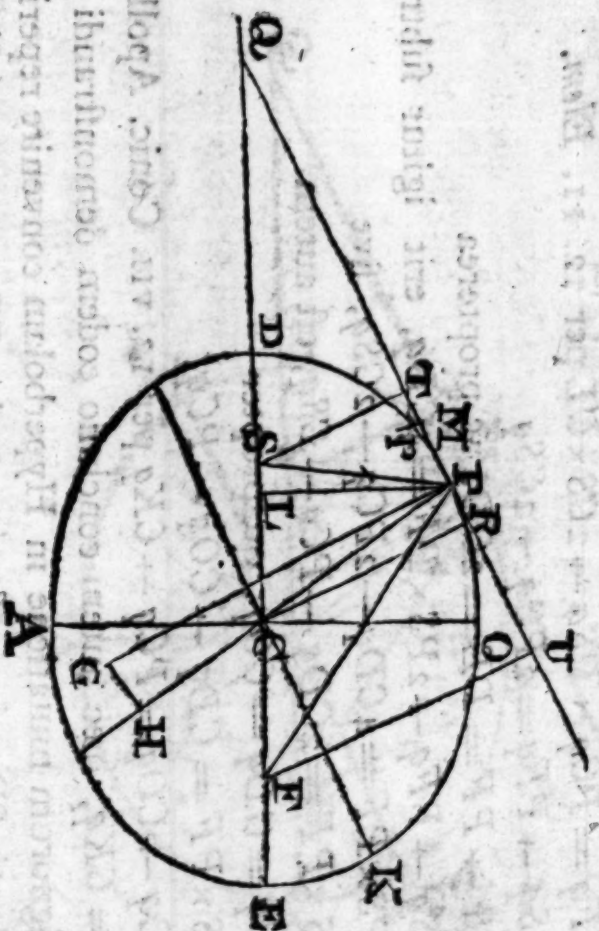
Isdem positis quæ in superiori figura, ex puncto $\mathcal{Q}$ demittatur in Tangentem perpendicularis $\mathcal{Q}L$, jam cum Triangulum $SP\mathcal{Q}$ exponat Tempus quo portiuncula Curvæ describitur, pone Tempus illud datum esse, quod ideo unitati æquale constituere possumus, erit igitur $ST \times P\mathcal{Q} = 1$; sed illud notum est, Radium concavitatis PG esse ad $P\mathcal{Q}$ ut $P\mathcal{Q}$ ad $\mathcal{Q}L$, erit igitur $\mathcal{Q}L = \frac{P\mathcal{Q}^2}{PG}$, sed $ST, SP :: \mathcal{Q}L, \mathcal{Q}D$, atque adeo erit $\mathcal{Q}D$ (quæ scilicet metitur abscissum momentum, corpus a Tangente, quæque propterea proportionalis est vi centripetæ,) $= \frac{\mathcal{Q}L \times SP}{ST} = \frac{P\mathcal{Q}q \times SP}{PG \times ST \text{ Cub.}}$, sed $STq \times P\mathcal{Q}$ datur, quippe quod positum fuerit $SP \times PT = 1$, erit igitur $\mathcal{Q}D$ seu vis centripeta ut $\frac{SP}{PG \times ST \text{ Cub.}}$.

Ex

Ex eo autem tempore quo Theorema supra allatum inventum fuerat, illud propriis demonstrationibus inflexere Geometrae Clarissimi D. J. Keilhus in *Actis Philof.* Num. 317. & D. Jac. Hermannus in *Phoronomia* sua pag. 70. quos consulat Lector.

CAPUT II.

*Proprietates quædam simplices Sectionum Conicarum ex natura
Focorum deductæ, quorum ope Lex virium Centripetarum, Veloci-
tates Corporum in eis reuoluentium, & descriptio Orbium facilli-
me determinantur.*



Sit DE Axis transversus conicae Sectionis, AO Axis alter, C centrum Sectionis. Sit P punctum quodvis in Curva, PQ tangens in P occurrens Axi transverso in Q ; puncta S , F foci; CP , CK semidiametri conjugate; PH semilatus rectum diametri CP , PG normalis Tangenti cui occurrit in G linea HG diametro CP perpendicularis: sint praeterea ST , CR , FV perpendiculares in Tangentem demissae e punctis S , C , F : denique demittatur in Axem normalis PL ; his positis.

I. *Rectangulum sub distantis ab utroque Ellipseos foco, hoc est $SP \times PF$ aequale est quadrato semidiametri CK .*

D E M O N S T R A T I O.

$$PSq = PCq + CSq - 2CS \times CL \text{ per 13. 11. Elem.}$$

$$PFq = PCq + CSq + 2CS \times CL \text{ per 12. 11. Elem.}$$

$$\text{Unde } PSq + PFq = 2PCq + 2CSq$$

Sed $PS + PF = DE = 2CD$, ac propterea

$$PSq + PFq + 2PS \times PF = 4CDq, \text{ erit igitur subtrahendo}$$

$$2PS \times PF = 4CDq - 2PCq - 2CSq, \text{ sive}$$

$$PS \times PF = 2CDq - PCq - CSq, \text{ est autem}$$

$$CSq = CDq - COq, \text{ quapropter}$$

$$PS \times PF = CDq - COq - PCq,$$

Sed $CDq + COq = PCq + CKq$ per 12. vii. Conic. Apoll. quare $PS \times PF = CKq$, haec autem conclusio eodem demonstrandi genere aptaque signorum mutatione in Hyperbolam convenire reperietur.

II. *Distantia SP a foco, est ad normalem ST e foco S in Tangentem demissam, ut Semidiameter conjugata CK ad Semiaxem minorem CO .*

D E M O N S T R A T I O.

Ob similia Triangula SPt , FPV , erit PS , PF : : ST , FV , quare componendo, $PS + PF$ erit ad $ST + FV$ & earundem dimidia CD ad CR , ut PS ad ST , sed $CR \times CK$ aequale est rectangulo $CD \times CO$ sub semiaxibus per 31. vii. Conicorum, proinde PS est ad ST , ut $CD \times CK$ ad $CD \times CO$ sive ut CK ad CO , ac pari argumento demonstrabitur PS esse ad FV in eadem ratione.

III. *In eadem etiam est ratione Semiaxis transversus CD ad normalem CR e centro C in tangentem demissam.*

Etenim

GKq : CK , PG , quæ proportio eodem, procedendi modo, reperietur Hyperbolæ iidem competere.

PROBLEMA I.

Moveatur Corpus in Conica Sectione: requiritur Lex vis Centripetæ tendentis ad focum Ellipseos.

SOLUTIO.

In expressione generali qua definita fuit lex vis Centripetæ, nimirum $\frac{SP}{PG \times ST \text{ Cub.}}$, loco lineæ PG scribatur $\frac{CK \text{ Cub.}}{CD \times CO}$, ipsi æqualis, per Prop. V. seu $CK \text{ Cub.}$ duntaxat, propter datas CD , CO , itemque loco lineæ ST scribatur $\frac{SP \times CO}{CK}$ ipsi æqualis per Prop. II. seu solum $\frac{SP}{CK}$, quo factò reperietur lex vis Centripetæ proportionalis quantitati $\frac{SP \times CK \text{ Cub.}}{CK \text{ Cub.} \cdot SP \text{ Cub.}}$, seu quantitati $\frac{1}{SPq}$, hoc est reciproce proportionalis quadrato distantiae,

COROLLARIUM I.

Velocitas Corporis in Conica Sectione revolvētis, est ad velocitatem revolvētis in Circulo ad eandem distantiam SP a centro virium in Subduplicata ratione distantiae FP ab altero foco, ad Sectionem transversum Sectionis: hoc autem facile fuit tum ex Prop. XVI. Lib. I. Princip. tum ex proprietatibus sectionum conicarum jam antea demonstratis: etenim cum sint velocitates Corporum in suis orbitis in ratione contrariâ ex ratione perpendicularium in tangentes Inverse, & subduplicata ratione laterum principalium directæ, pone L esse latus principale Conicæ Sectionis; erit igitur velocitas Corporis revolvētis in Conica Sectione, ad velocitatem revolvētis in Circulo ad eandem distantiam SP , ut $\frac{\sqrt{L}}{ST}$ ad $\frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, sed ex definitione lateris recti lateris recti principalis, $L = \frac{2COq}{CD}$, est igitur ratio velocitatum ut $CO \times \sqrt{SP}$ ad $ST \times \sqrt{CD}$, sed ST demonstrata fuit æqualis $\frac{CO \times SP}{CK}$, adeoque ratio prædicta evadit ut $CO \times \sqrt{SP}$ ad $\frac{CO \times SP \times \sqrt{CD}}{CK}$, sive ut CK ad $\sqrt{SP \times CD}$, sed $CK = \sqrt{SP}$

$\sqrt{SP \times PF}$, quapropter ratio velocitatum recte definitur per rationem $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$.

Coroll. II^{um} ex datis, velocitate in Conica Sectione, positione Tangentis, & Centro virium seu foco, facile determinabitur focus alter.

Sit enim velocitas data R ; ea autem velocitas, qua describeretur Circulus ad datam a Centro distantiam SP , sit $\mathcal{Q}$; jam per Corollarium I^{um} est R ad $\mathcal{Q}$ ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$, adeoque $\mathcal{Q}$ ad RR ut CD ad PF , five $2\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ ad RR , ut $2CD$ ad PF , sed in Ellipsi $2CD = SP + PF$, est itaque $2\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ ad RR , ut $SP + PF$ ad PF & dividendo, $2\mathcal{Q}\mathcal{Q} - RR$ est ad RR ut SP ad PF : datur autem SP , adeoque datur PF magnitudine, sed PF datur etiam positione, ob Angulum FPR angulo SPT aequalem; datur igitur punctum F in quo locatur focorum alter; quo invento descriptio Curvae in promptu est.

Sin vero $\frac{1}{2}RR$ majus fuerit quadrato $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$, $2\mathcal{Q}\mathcal{Q} - RR$ erit quantitas negativa, & loco Ellipseos, Trajectoria describenda in Hyperbolam vertitur, tum erit $RR - 2\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ ad RR , ut SP ad PF distantiam alterius foci, ad alterum Tangentis latus ponendam ut habeatur Focus F .

Quod si acciderit ut $\mathcal{Q}\mathcal{Q}$ aequale sit dimidio quadrato ex R , evanescente scilicet quantitate $2\mathcal{Q}\mathcal{Q} - RR$, tunc quarta proportionalis PE evadet infinita, proinde Trajectoria describenda desinet in Parabola, cujus Axis positione datur, quippe qui tunc parallelus sit lineae PF quae positione datur, propter Angulum FPR aequalem Angulo SPT ; cum igitur dentur Punctum P , itemque Focus F , postremo positio Axis, palam est Trajectoriam parabolicam definitam esse.

Si cui libitum fuerit Calculum inire de invenienda lege vis Centripetae in Curvis quae ex duplici foco describuntur, iis bina ternave sequentia Theoremata usui fortasse erunt, quae idcirco prioribus adjungere visum est.

THEOREMA

EXEMPLUM

Sit $z+v=2r$, tunc Numerator evadet

$$\begin{aligned} &= \frac{4xz^2zv \times 2vz - 4aa - +xz - +vv}{\text{Denominator vero}} = \\ &= \frac{4rr - 4aa \times 4aa - 4rr - 4xz - +8rz}{\text{sed } zz + 2vz + vv = 4rr, \text{ qua-}} \\ &\text{re Numerator ulterius redigi poterit ad } 4xz^2zv \times 4rr - 4aa, \text{ Denomi-} \\ &\text{nator vero, propter } 8rz - 4xz = 4z \times 2r - z, \text{ poterit redigi ad} \\ &\frac{4rr - 4aa \times 4aa - 4rr - 4zv}{\text{pone } rr - aa = mm, \text{ tunc } Pp^2 \text{ evadet}} \\ &\frac{zzzv}{vz - mm}, \text{ adeoque } Pp = \frac{z\sqrt{zv}}{\sqrt{vz - mm}}. \end{aligned}$$

THEOREMA III.

*Si ex puncto P demittatur PA perpendicularis ad Axem, sint-
que, Pp=P, PB=S, PA=Y, Bb=i, Radius Concavitatis erit*

$$\frac{ssp}{P - iy}.$$

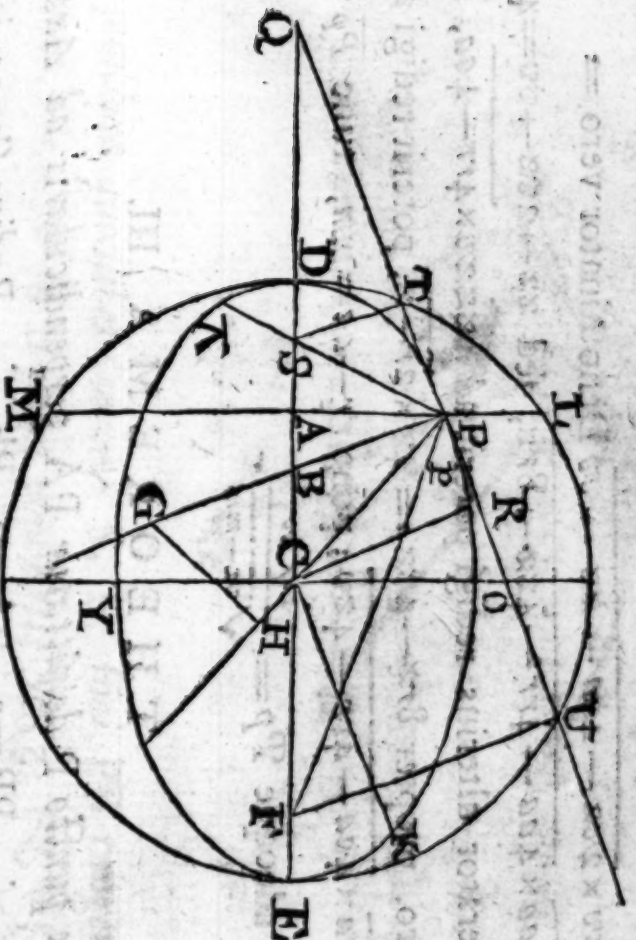
Ex datis autem PS, PF, FS , inveniuntur PA & SA ; ex datis
porò SB & SA , inveniuntur AB ; ex datis AB & PA , inveniuntur
 PB ; ex data SB inveniuntur Fluxio ejus Bb , postremo ex data AE -
quatione involvente relationem z ad v , fluxiones p & i exprimi po-
terunt per z , adeoque Radius Concavitatis omnino Fluxionibus li-
berabitur.

Hujus rei videre est Exemplum in Curva cujus Aequatio est
 $z+v=2r$ etenim si ponatur $rr-aa=mm$, inveniuntur $PA=y=$
 $\frac{m}{a}\sqrt{vz-mm}$, $SB=\frac{az}{r}$, adeoque $Bb=i=\frac{az}{r}$, $PB=s=\frac{m}{r}\sqrt{zv}$,

$$p = \frac{z\sqrt{vz}}{\sqrt{vz-mm}}, \text{ ex quibus elicitur } \frac{\iint p}{p-iy} = \frac{vz\sqrt{vz}}{rm}.$$

Si Centro S , intervallo SP , describatur arcus PZ , occurrens lineæ
 Sb in Z , tum ex quadrato Pp , subtrahatur quadratum pZ , relinque-
tur quadratum PZ , sed $Pp, PZ::PS, ST$, adeoque innotescet
perpendicularum ST , e centro virium S in Tangentem demissum.

Tabula Linearum maxime insignium quæ in Ellipse ponuntur.



Sit DE Axis major Ellipseos, OR Axis minor, C Centrum; sint S, F foci, P punctum in Curva; PS, PF lineæ e puncto P ad focos ductæ, PQ tangens occurrens axi transverso in Q ; ST, CR, RP perpendicularares e punctis S, C, F , in tangentem demissæ; PB Tangenti normalis occurrens axi transverso in B ; PA perpendicularis e puncto P demissa in Axem transversum; PC, CK , semidiametri conjugatæ; PG radius Concavitatis; GH perpendicularis e centro Concavitatis G ad diametrum PC demissa; $PS\pi$ lineæ per focum ducta utrinque Curvam attingens in P & π ; $P\phi$ arcus Curvæ quam minus; DVE Circulus diametro DE descriptus. Sit $CD=r$, $CO=m$, $CS=\sqrt{r^2-mm}=a$, $SP=x$, $PF=v$, his positis erunt.

$$SA = \frac{r^2-mm}{a}$$

$$CA = \frac{r^2-r^2}{a}$$

$$PA = \frac{m}{a} \sqrt{vz-mm}, \text{ quæ itidem intersit Hyperbolæ.}$$

$$SB = \frac{4z}{r}, \text{ expressio communis Ellipseos \& Hyperbolæ.}$$

$$PB = \frac{m}{r} \sqrt{zv}$$

$$PQ = \frac{\sqrt{vz} \times \sqrt{vz-mm}}{z-r}, \text{ cui in Hyperbola est analoga } \frac{\sqrt{vz} \times \sqrt{vz-mm}}{z+r}$$

$$ST =$$

$ST = \frac{mz}{\sqrt{vz}}$, quæ expressio iudem competit Hyperbolæ, hinc poterit etiam deduci expressio lineæ e Parabolæ foco in tangentem normaliter ductæ, etenim $\frac{mz}{\sqrt{vz}} = \frac{mz}{\sqrt{2xz - vz}}$; sed in Parabola r est infinita, proinde ST evadet $\frac{mz}{\sqrt{vz}}$, cuius quadratum est $\frac{mz}{z}$, sed $\frac{mz}{z}$ est $\frac{1}{4}l^2$, recti, hinc si ponatur latus rectum = l erit in Parabola $ST = \sqrt{\frac{1}{4}l^2}$, siue media proportionalis inter SD & SP , atque eodem modo proprietates cæteræ Ellipseos aut Hyperbolæ in Parabolam transferri poterunt.

$$CR = \frac{mr}{\sqrt{vz}}$$

$$PK = \frac{mr}{\sqrt{vz}}$$

$$CK = \sqrt{vz}$$

$$PC = \sqrt{rr + mm - vz}, \text{ in Hyperbola vero } PC = \sqrt{rr - mm + vz}$$

$$PT = \sqrt{z \times \sqrt{vz - mm}}$$

$$PV = \frac{\sqrt{vz} \times \sqrt{vz - mm}}{\sqrt{z}}$$

Rectangulum $PQ \times PV = vz - mm$; cum vero in Ellipsi Puncta Q, V jaceant in peripheria circuli diametro DE descriptæ, sequitur rectangulum partium lineæ cuiusque, per punctum P ductæ, atque hinc inde peripheriam pertingentis, semper futurum fore æquale quantitati $vz - mm$; hoc vero alia ratione probari potest ad hunc modum; producantur utrinque lineæ PA usque ad hunc se habent

cumferentiam circuli in L & M , tunc cum sit $AL = \frac{1}{2}l$, $\sqrt{vz - mm}$

$$AP = \frac{m}{a} \sqrt{vz - mm}, \text{ erit } PL \times PM = AL \times AP = \frac{r}{m} \times vz - mm$$

$$= \frac{aa}{a} \times vz - mm = vz - mm.$$

$$QS = \frac{az}{r - z}, \text{ in Hyperbola } QS = \frac{az}{z + p}, \text{ in Parabola } QS = z.$$

$$PG = \frac{vz \sqrt{vz}}{mm} \text{ Expressio communis Ellipseos \& Hyperbolæ, quæ in}$$

$$\text{Parabola evadit } \frac{1}{4}l^2.$$

$$PH = \frac{vz}{\sqrt{rr + mm - vz}}, \text{ in Hyperbola } = \frac{1}{\sqrt{rr - mm + vz}}, \text{ in Parabola}$$

$$= 2z.$$

Si

Si e Puncto P in peripheria conica sectionis sumpto, ducatur per focum linea quaecunque PS quæ producta iterum occurrat peripheriæ in puncta π , erit rectangulum $PS \times S\pi$ applicatum ad totam $P\pi$ æquale quartæ parti lateris recti principalis conicæ Sectionis.

Arcus circuli quam minimus Pp in Ellipsi & Hyperbola erit $= \frac{z\sqrt{vz}}{\sqrt{vz-mm}}$, qui in Parabola evadet $= \frac{z\sqrt{2lz}}{\sqrt{2lz-\frac{1}{3}ll}}$.

* Arcus circuli quam minimus PZ , centro S , intervallo SP descriptus, metiens Angulum $PSp = \frac{mz}{\sqrt{vz-mm}}$.

PROBLEMA II.

Revolvatur corpus in Ellipsi circa Focum S ; requiritur Punctum illud peripheriæ ubi sit velocissimum decrementum velocitatis angularis.

SOLUTIO.

In omni Trajectoria, velocitates angulares circa Centrum virium sunt reciproce proportionales quadratis distantiarum ab illo centro: etenim ob sectorum minimorum areas æquales, arcus quam minimi quibus anguli subtenduntur sunt reciproce ut radii, anguli autem sunt ut arcus directe & reciproce ut radii; ex quo fit ut anguli Sectorum minimorum, area æqualium, sint inter se reciproce in ratione duplicata radiorum seu distantiarum a centro virium: quo posito, si distantia a centro virium nominetur z , erit velocitas angularis ut $\frac{1}{z^2}$, cujus decrementum est $-\frac{2}{z^3}$; sit jam distantia ab altero foco $= v$, semaxis minor $= m$; tunc ex superiori tabula, invenietur area SPp , qua tempus exponitur, proportionalis quantitati $-\frac{zz}{\sqrt{vz-mm}}$; est igitur $-\frac{zz}{\sqrt{vz-mm}}$ quantitas data, quam idcirco constituere possumus Unitati æqualem, quo facto erit z ut $\frac{\sqrt{vz-mm}}{z}$, atque adeo decrementum velocitatis angularis erit nunc proportionalis quantitati $\frac{\sqrt{vz-mm}}{z^3}$ quæ cum debeat esse *Maximo* æqualis, erit ex doctrina Fluxionum

$4z^3z\sqrt{vz-mm} = \frac{vz+zv}{2\sqrt{vz-mm}} \times z^4$, five $8z \times vz-mm = 8zz - + zzv$, sed est $z+v=2r$, adeoque $z+v=0$, five $v=-z$, erit igitur $8vz-8mm=vz-zz$, quapropter si scribatur $2r-z$ loco quantitas v , hinc emerget Aequatio $zz - \frac{7}{3}z = -\frac{4mm}{3}$ cujus Radix z est vel $\frac{7r-\sqrt{49r^2-48mm}}{6}$ vel $\frac{7r+\sqrt{49r^2-48mm}}{6}$, harum vero radicum posterior erit inutilis, propter limitationem ab Ellipsi oriundam, etenim hoc in casu, radix z major erit quam ut possit ex foco S in Ellipsi accommodari.

PROBLEMA III.

Positis iisdem ac in Superiori Problemate, invenire Punctum illud in quo sit velocissimum decrementum velocitatis motus realis in Curva.

SOLUTIO.

Notum est velocitatem in Curva esse reciproce proportionalem perpendiculari e foco S in tangentem demissæ, est igitur velocitas ut $\frac{1}{ST}$ hoc est ut $\frac{\sqrt{vz}}{mz}$, five propter datam m ut $\frac{\sqrt{v}}{z}$, cujus idcirco Fluxio,

nimirum $\frac{z\dot{v}-v\dot{z}}{2\sqrt{vz}}$ five $\frac{-zv\dot{z}}{2\sqrt{vz}}$ est decrementum velocitatis, sed cum tem-

poribus aequalibus, Areae describantur aequales; quantitas quæ tanquam constans spectari debet est $Pp \times ST$: sit igitur $Pp \times ST = 1$,

hinc erit $\frac{z\sqrt{vz}}{\sqrt{vz-mm}} \times \frac{\sqrt{vz}}{mz}$ five $\frac{mzx}{\sqrt{vz-mm}} = 1$. quod quidem statim

elici poterat ex Tabula superius allata; quare erit z ut $\frac{\sqrt{vz-mm}}{z}$;

arque adeo, erit decrementum velocitatis, tempore quam minimo dato factum, ut $\frac{\sqrt{vz-mm}}{2z\sqrt{vz}}$, cujus quantitas Fluxio jam est æquanda

nihilo, unde exurget Aequatio $\frac{vz+zv}{2\sqrt{vz-mm}} \times z\dot{z}\sqrt{vz} = \frac{vz^3+3z^2zv}{2\sqrt{vz}}$ $\times$

$\sqrt{vz-mm}$, five scripto $-z$ loco Fluxionis v , sublatique irrationalibus; $4vvz-5mmv+mmz=0$; præterea scripto $2r-v$ loco quantitatibus z , prodibit Aequatio $2v^3-4rvv+3mmv-rmm=0$, in qua una

duplexat ex Radicibus erit possibilis; siu convertatur z in $27-z$, Aequatio evadet $2z^3-8rzz+8rrz-5mmr=0$, quoniam

$$\text{vero latus principale Ellipseos est } \frac{mm}{r} = l, \text{ seu } mm = \frac{1}{2}rl, \text{ hinc}$$

$$\text{emerget Aequatio } 2z^3-8rzz+\frac{48rrz}{2}-\frac{1}{2}rrl=0, \text{ quæ ut ad Para-}$$

$$\text{bolam transferatur, deleantur termini ii omnes in quibus quantitas}$$

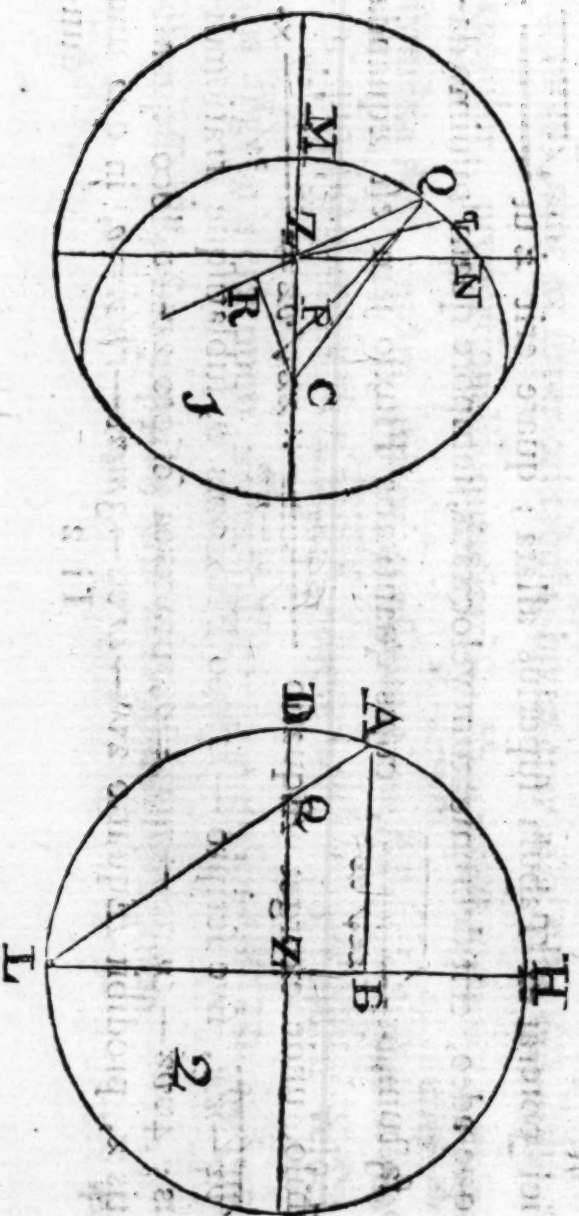
insinifia r vel non reperitur, vel ad quadratum non ascendit; tunc ex reliqua parte Aequationis, nimirum $8rrz-\frac{1}{2}rrl=0$ seu $8z=\frac{1}{2}l=0$, elicietur $z=\frac{5}{16}l$, seu $=\frac{1}{4}SD$.

PROBLEMA III.

Data Solis declinatione, & Poli altitudine; invenire Momentum illud temporis quo Azimuthum Solis lentius augetur quam nullo alio temporis momento.

SOLUTIO.

Revolvatur Sol circa Polum P in parallelo $MQAN$, (fig. 1a) sit Z Zenith, simulque centrum Projectionis Stereographicæ; ZQ , Zq , duo altitudinis circuli sibi invicem proximi: intelligatur arcus maximus circuli per puncta Q , q ductus, ita ut Triangulum ZQq possit haberi pro Triangulo Sphærico ex arcibus maximaque circulo sunt constante; quo posito erit super Globum signus Anguli QZq ad sinum Arcus Qq , ut sinus Anguli QqZ ad sinum lateris QZ .



Sed $\mathcal{Q}$ dato tempore datur, eò quod Sol æquabiliter in Parallelo moveatur, ergo sinus Anguli $\mathcal{Q}Z$, est ut $\frac{\sin. An. \mathcal{Q}Z}{\sin. An. \mathcal{Q}Z}$, sive ut

$\frac{\sin. An. \mathcal{M}\mathcal{Q}Z}{\sin. An. \mathcal{Q}Z}$, etenim anguli $\mathcal{M}\mathcal{Q}Z$, $\mathcal{Q}Z$ differunt inter se tantummodo quantitate infinite parva; at vero anguli in Projectione Stereographica idem sunt qui in Globo; ea igitur ratio quam habet sinus Anguli $\mathcal{M}\mathcal{Q}Z$ in Projectione ad sinum ejus Arcus quem $Z\mathcal{Q}$ repræsentat, æquanda est *Minimo*. Sit igitur in Projectione C centrum circuli $\mathcal{M}\mathcal{Q}N$, jungaturque $\mathcal{Q}C$; jam cum Angulus $Z\mathcal{Q}C$ sit complementum anguli $\mathcal{M}\mathcal{Q}Z$, hinc efficietur ut $\frac{\cos. An. Z\mathcal{Q}C}{\sin. An. \mathcal{Q}Z}$ sit æquandus *Minimo*.

E Centro C demittatur in $Z\mathcal{Q}$ normalis CR , jam si Radius $C\mathcal{Q}$ ponatur $= a$, $CZ = f$, $\mathcal{Q}C = z$, atque insuper $aa - ff = bb$, reperietur $\mathcal{Q}R = \frac{bb + zz}{z}$, sed $\mathcal{Q}R$ est Cos. Anguli $Z\mathcal{Q}C$ ad Radium $C\mathcal{Q}$, erit igitur quantitas $\frac{bb + zz}{z}$ Numerator fractionis æquandæ minimo: præterea cum linea $\mathcal{Q}Z$ ex natura Projectionis sit æqualis tangenti dimidii ejus Arcus quem ipsa repræsentat, consequens est ut sinus ejusdem Arcus ad Radium Globi futurus sit æqualis quantitati $\frac{2rrz}{r + zz}$, etenim (fig. 2.) patet esse $L\mathcal{Q}$ ad $LZ :: LH$, LA , itemque $L\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}Z :: LA$, BA , adeoque conjunctis rationibus, $L\mathcal{Q}$ quad. $LZ \times \mathcal{Q}Z :: LH$, BA , sive $rr + zz$, $rz :: 2r$, $\frac{2rz}{r + zz} = AB = \sin. Arc. \mathcal{Q}Z$ ad Radium r , atque adeo sinus Anguli illius quem metitur Arcus $\mathcal{Q}Z$ ad Radium a , erit $\frac{2ra}{r + zz}$ æqualis scilicet Denominatori fractionis æquandæ *Minimo*, quapropter si dividatur quantitas $\frac{bb + zz}{z}$ per $\frac{2ra}{r + zz}$, quotiens $\frac{bb + zz \times r + zz}{4ra}$ erit quantitas æquanda *Minimo* quæ idcirco si ponatur *Minimo* æqualis, reperietur per regulas notas $\frac{4ra}{4ra} = \sqrt{bb}$.

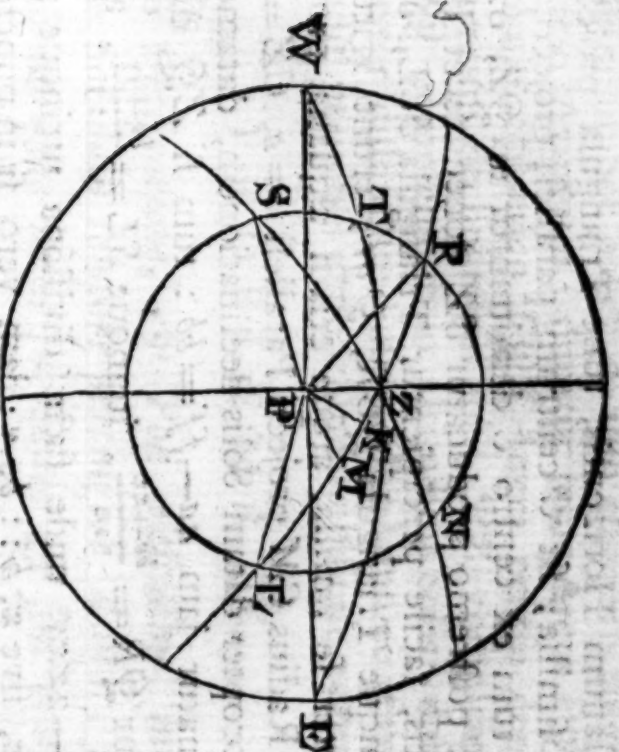
Jam si in Centro Z erigatur ZN normalis ad ZM , eaque producatutur donec secuerit parallelum $\mathcal{M}\mathcal{Q}$ in N , deinde ducatur CN , palam est $ZNa = CNq - C\mathcal{Q}q = aa - ff$, sed bb possum fuit $= aa - ff$, est igitur $ZN = b$, sed ex natura Projectionis Stereographica ZN est tangens dimidii complementi ejus altitudinis quam Sol habet sub verticali ortus & occalus; porro hæc altitudo datur, propter datam Solis declinationem, datamque Poli altitudinem; datur igitur ZN seu b , atque adeo si sumatur media proportionalis inter ZN & Radium

Sphæ-

sunt similia inter se & equalia: projiciatur nunc Globus Stereographicus in planum Horizontis, tunc Triangula projecta Qgt , Sro erunt inter se similia; sit C centrum paralleli projecti, ducantur linee CQ , CS , tum ex centro C demittantur in QZ , SZ , perpendicularia CR , CL , postremo producantur SZ donec secet Parallelum in X , quibus factis, facile percipientur Triangula SCL , Sro esse inter se similia, itemque Triangula QCR , Qgt ; erunt igitur Triangula CQR , CSL inter se similia, atque etiam equalia, propter equalitates CQ , CS . Sit Radius CM projecti Paralleli $=a$, $CZ=f$; hæc vero lineæ dantur propter datam Solis declinationem, datamque Poli altitudinem; ponatur jam $aa-ff=bb$: tum si ZQ dicatur z , & ZS, y ; invenietur $QR = \frac{b+z}{z}$, itemque $SL = \frac{b+y}{y}$, adeoque $2by$

$-2bbz=2yz-2zzy$, unde facta divisione utrinque per $zy-2z$, prodibit $bb=yz$, five $z, b :: b, y$; jam vero si in puncto Z erigatur ZM normalis ad ZD quæ secet circulum YMS in D , erit hæc linea $ZD=b$, quapropter erit ZQ ad ZD ut ZD ad ZS : hoc est tangens dimidii complementi ejus altitudinis quam Sol habet sub initio temporis dati, est ad tangentem dimidii complementi quam habet sub ortu & occasu, ut hæc tangens ad tangentem ejus altitudinis quam habet post tempus datum; at vero Anguli QZD , DZS sunt inter se æquales, etenim erit ex proprietate Circuli, rectangulum SZY æquale est quadrato ex ZD , sed hoc quadratum demonstratum fuit æquale rectangulo SZQ , erunt igitur rectangula SZY , SZQ inter se equalia, adeoque lineæ ZY , ZQ erunt inter se æquales, ex quo fit ut anguli MZY , MZQ sint inter se æquales, porro anguli ad verticem oppositi MZY , SZC sunt inter se æquales, erunt igitur anguli MZQ , SZC etiam inter se æquales, qui si subtrahantur a rectis angulis DZM , DZC , residui anguli QZD , SZD erunt inter se æquales; quapropter si Sol intra datum tempus tetigerit duos verticales hinc inde æqualiter ab ortu & occasu distantes, differentia earum altitudinum quam habuit sub initio & fine temporis dati, major erit quam si duos quolibet alios verticales intra idem tempus attigisset.

Nunt ut inveniaturs declinatio horum verticalum a primario verticali, itemque differentia altitudinum Solis sub initio & fine temporis dati, sic pergere licet.



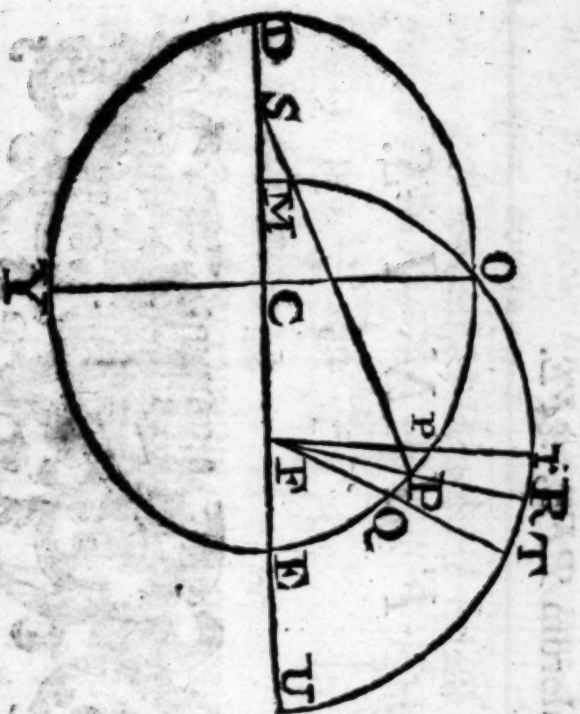
Sit P polus Mundi, Z zenith, WZE primarius verticalis, $RNLS$ parallelus quem Sol dato die decurrit; LZR , NZS verticales duo hinc inde aequaliter a primario verticali declinantes, secantesque parallelum Solis in punctis $RNLS$: ex puncto P ad puncta sectionum R, S, L , ducantur Meridiani PR, PS, PL ; deinde polo P per Z describatur circulus secans RZL in M , tunc ducatur Arcus circuli maximi PM ; postremo e Polo P ducatur ad RZL arcus perpendicularis PK ; his positis patet Triangula ZPR, MPL , esse inter se aequalia, itemque Triangula ZPS, ZPL, MPR , adeoque angulos ZPS, ZPL esse inter se aequales, porro si ex aequalibus angulis ZPS, ZPL demantur anguli aequales ZPR ; MPL , anguli residui RPS, ZPM erunt inter se aequales: sed angulus RPS est mensura temporis a Sole impenso intra verticales RZL, SZN ; quamobrem angulus ZPM est mensura ejusdem temporis, sed ex Doctrina Sphaericorum, est Radius ad Cosinum arcus ZP , ut tangens Anguli ZPK ad Cotangentem anguli PZK , seu Radius est ad sinum latitudinis, ut Tangens dimidii ejus anguli qui tempus metitur, ad tangentem declinationis verticalium ZR, ZS a primario verticali; praeterea cum Triangula MPR, ZPS sint inter se aequalia, perspicuum est ZM esse differentiam arcuum ZR, ZS , hoc est differentiam

tiam altitudinum Solis sub initio & sine temporis dati, at vero arcus ZK aequalis est dimidio arcui ZM , erit igitur arcus ZK dimidia differentia altitudinum Solis, qui arcus ex hac analogia innoscet, nimirum; Cofinus anguli PZK , seu finus declinationis verticalium a primario verticali, est ad Radium, ut Cotangens arcus PZ , seu Tangens latitudinis, ad Cotangentem arcus ZK .

Tempora vero seorsum sumpta quibus Sol percurrit arcus inaequales RT , TS interpositos inter verticales ZR , ZS & primarium verticalem, ex data poli altitudine, Solis declinatione, & declinatione verticalium ex Sphaericis peti poterunt.

PROBLEMA V.

Si in Ellipse EPD cujus centrum C , Axis major DE , Axis minor OY , Foci S , F , Planeta revolvat circa centrum virium in Foco S positum, tunc ex puncto P in Curva sumpto, ducantur ad Focos lineae PS , PF ; deinde ad lineam FE & punctum F constituantur Angulus EFQ qui sit ad duos rectos, ut Area PSE ad Aream Semi-Ellipseos $DOPE$; invenire maximam differentiam Angulorum EEP , EEQ .



SOLUTIO.

Sit ut antea semi-axis major $CD=r$, semi-axis minor $CO=m$, $SP=z$, $FP=v$; centro F , intervallo r describatur circulus MRY occurrens axi transverso in M & V ; deinde producantur FP , FQ donec:

K k

donec secent circumferentiam circuli in R & T ; postremo sumatur punctum p puncto P infinite vicinum, ducaturque Fp occurrens circumferentiæ in r ; sit Arcus $VT=t$, Arcus $VR=y$, semicircumferentia $MTV=b$; jam vulgo notum est Arcam semi-ellipticos esse $=\frac{1}{2}mb$, quapropter si Area ESP nominetur A , erit t , $b :: A$, $\frac{1}{2}mb$, erit igitur $t = \frac{2A}{m}$ unde erit $\dot{t} = \frac{2\dot{A}}{m}$, sed ex inspectione Tabulae nostræ est $\dot{A} = \frac{-\frac{1}{2}mzx}{\sqrt{vz-mm}} = \frac{-\frac{1}{2}mzv}{\sqrt{vz-mm}}$, utpote quæ sit genita ex ductu dimidii arcus quam minimi Pp in perpendicularum e foco S in tangentem demissum. Sequitur itaque ut $\dot{t}$ sit $= \frac{zv}{\sqrt{vz-mm}}$; sed ex eadem Tabula, patet arcum infinite parvum, radio v descriptum, mensuram scilicet anguli PFp esse $= \frac{mv}{\sqrt{vz-mm}}$, erit igitur $Rr=y$ $= \frac{mrv}{v\sqrt{vz-mm}}$, ex quo efficitur ut $\dot{t}$, $\dot{y} :: vz$, mr ; sed in casu $Maximi$, est $\dot{t}-\dot{y}=0$, quare erit $vz-mr=0$, sive $vz=mr$. Hinc, si centro C , intervallo $\sqrt{rr+mm}-mr$ describatur Circulus secans Ellipsim in quatuor punctis, ea erunt Puncta in quibus fient maximæ differentiae angulorum PFE , QFE .

F I N I S.



E R R A T A.

PAG. 19. lin. 34. pro præcipiatur, lege perciperetur
 Pag. 21. lin. 10. pro parte, lege partes

lin. 20. dele &c.

lin. 5 ab ima pagina, pro posterior, lege posterior $\frac{n+1}{2}$

lin. 3 ab ima pagina, post affirmativos dele n

Pag. 38. lin. 10. pro mP, lege m³P

lin. 17. pro $\mathcal{Q}=v$, lege $\mathcal{Q}=1$

Pag. 56. lin. 14. pro $1-\overline{pz}^{12}$, lege $1-\overline{px}^{12}$

Pag. 60. lin. 1. pro $\overline{\theta-\lambda n} \times F - z^3 \times R^{-\lambda}$, lege $z^3 R^{-\lambda} - \overline{\theta-\lambda n} \times F$

Pag. 62. lin. 1. pro $+\overline{2\theta-4\lambda n}$, lege $-\overline{2\theta-4\lambda n}$

Pag. 63. lin. 5. pro Denominator, lege Numerator

Pag. 69. lin. 12. pro $4pz$ lege $+\overline{pz}$

Pag. 112. lin. 1. pro $v \times n+1$, lege $v \times n+1$

Pag. 118. lin. 5. producatur linea super terminos ducta usque dum per-
 tingat ad ultimum terminum z

Pag. 148. lin. 4. post septimi, adde accommodasse

Pag. 149. lin. 6. ab ima pagina, pro hinc, lege hunc

Pag. 159. lin. 11. pro $\frac{x+1}{2}$ lege $\frac{x+1}{1}$

Pag. 160. lin. 8. dele hæc

Pag. 203. lin. 1 & 2. pro propositio, lege proposito

Pag. 206. lin. ult. pro $\overline{a^3b^2-b^2}$, lege $\overline{a^3-b^3}$

Pag. 215. lin. 11. ab ima pagina, pro dilapsus, lege delapsus.



[Faint vertical text from bleed-through:]



1977

Ms. A. 9. 2. 1. 8. 1. 2. 3.

1881. 2. 28. 811. 89.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Oct 10 1905

1899

100

17

2000-0000

10. 503. 4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838.

10





MISCELLANEIS ANALYTICIS SUPPLEMENTUM.



Liquot post diebus quam Liber qui inscribitur, *Miscellanea Analytica*, in lucem prodisset, Doctissimus *Stirlingius* me licetis admonuit Tabulam ibi a me exhibitam de summis Logarithmorum, non satis autoritatis habere ad ea firmanda quæ in speculatione niterentur, utpote cui Tabulæ subesset error perpetuus in quinta quaque figura decimali summatum: quæ cum pro humanitate sua monuisset, his subiunxit seriem celerime convergentem, cujus ope summæ logarithmorum tot numerorum naturalium quot quis sumere voluerit facile obtineri possent; res autem sic exposita fuerat.

Si sumantur tot numeri naturales quot libitum erit, quorum ultimus designetur per $x - \frac{1}{2}$; pone $a = .43429448190325$, hoc est pones a æqualem unitati divisæ per logarithmum hyperbolicum numeri denarii; quo factò summa logarithmorum his numeris contentium designabitur per Seriem

$$x \log. x - ax - \frac{a}{2 \times 12x} + \frac{7a}{8 \times 360x^3} - \frac{31a}{32 \times 1260x^5} + \frac{63a}{128 \times 1680x^7}$$

&c. his vero adiungendus est numerus 0.399089934179 &c. dimidius nempe logarithmus circumferentiæ circuli cujus Radius est unitas.

Ubi primum oculos conieci in hanc Seriem quam ingrediuntur numeri 12, 360, 1260, 1680 mihi valde usitati, nullum mihi fuit dubium quin vel eam demonstrare, vel aliam huc spectantem investigare possem, idque eadem prorsus via qua affectus eram solutionem de inveniendâ media Coefficiente Binomii *Newtoniani*, quæ in hoc sita erat ut summæ logarithmorum invenirentur.

Quod autem a me factum erat, ad idem argumentum pertinens, eo potissimum redit.

Media Coefficientis Binomii cujus index est $2m$, designatur quantitatibus $\frac{m+1}{m} \times \frac{m+2}{m-1} \times \frac{m+3}{m-2} \times \frac{m+4}{m-3} \times \frac{m+5}{m-4} \text{ &c.}$ ad tot factores perducendis quot sunt unitates in m .

Jam vero cum in potestatibus permagnis, multiplicationes quæ ad id obtinendum requiruntur adeo prulæ sint, ut res ad usum non facile accommodetur, nihil melius mihi faciendum putaveram quam ut experiret num mihi liceret summas logarithmorum approximatione quadam consequi, quod ita successit, ut post tentamen unum aut alterum, hanc conclusionem eruerè potuerim.

Logarithmus mediæ Coefficientis in potestate permagna cujus index sit $= 2m$, sic satis commode designabitur.

$2m - \frac{1}{2} \times \log. 2m - 2m \log. m + \log. 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$
 e quo si subtrahatur $\log. 2^{2m}$, sive $2m \log. 2$, quod relinquatur, nempe
 $2m - \frac{1}{2} \log. 2m - 2m \log. 2m + \log. 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$
 exprimet proxime logarithmum rationis quam, in potestate permagna, mediæ coefficientis habet ad summam coefficientium omnium.

Non vero mihi necesse videtur ut ea nunc minutim revocem quæ ad hanc conclusionem me perduxerant, satis erit in rem præsentem si eorum aliqua breviter attigero.

Quantitates $2m - \frac{1}{2} \log. 2m - 2m \log. 2m + \log. 2$ deductæ fuerant e quadraturis * Fractiones autem $\frac{1}{12}, \frac{1}{360}, \frac{1}{1260}, \frac{1}{1680}$ sic genitæ erant.

Prima ortum habuerat a progressionē geometrica

$\frac{s^3}{6m^3} \times 1 + \frac{s^5}{mm} + \frac{s^7}{m^3} + \frac{s^9}{m^5} + \frac{s^{11}}{m^7} \text{ &c.}$ facta $s = m - 1$, cujus summa

æqualis est fractioni $\frac{1}{6m} \times \frac{m-1}{2m-1}$, quæ fractio, si ponatur m esse permagna vel potius infinita, desinet in $\frac{1}{12}$.

Secunda nata erat ex Serie

$\frac{s^5}{180m^5} \times 6 + \frac{15s^7}{mm} + \frac{28s^9}{m^3} + \frac{45s^{11}}{m^5} + \frac{66s^{13}}{m^7} \text{ &c.}$ cujus summa inven-

* Vide Miscellanea Analytica, Pag. 126, & 127.

[3]

ta fuerat $\frac{4m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 4m + 1}{180m^3 \times 2m - 1^3}$, quæ in casu infinito redigitur ad $\frac{1}{360}$.

Cum vero hæc posterior Summa mihi implicata videretur, tentaveram an Summas reliquas aliquanto facilius mihi comparare possem, sumptis utique $r = \frac{m-1}{m}$ & $s = m-1$, Tertia Summa sic prodierat.

$\frac{5s}{630m^5} \times \frac{15-5r+10rs-5r^2+r^3}{1+r^3}$, quæ in casu infinito evadit $\frac{1}{1260}$, qualis autem illa series fuerit, cujus summam hic exhibemus inferius declarabitur.

Quarta Summa sub hac forma comparuerat,

$\frac{5s}{840m^5} \times \frac{28+14r+42rs-35r^2+21r^3-7r^4+r^5}{1-r^3}$, quæ in casu infinito evadit $\frac{1}{1260}$.

Cum eo usque procefferam, affulserat mihi spes aliqua fore ut, si cæteras Summas persequerer, lex continuationis in conspectum veniret; verum Calculi tedium reformidans, hic constitueram, idque eo libentius quod putarem Problema istud in quod paucæ horas impenderam, toleranter fuisse solutum; adde quod cum non ideo susceptum fuisset ut propter se solveretur, sed ut juvaret solutionem alterius cuiusdam Problematis quod pulcherrimum judicaveram; mihi videbar in iis quæ feceram, aliquo jure posse acquiescere.

Attamen post receptam *Stirlingii* Epistolam, cum mihi aliquid vacui temporis suppeteret, constitueram totum illud denuo excutere, atque initium sumere ab isto Problemate de inveniendis Summis Logarithmorum ab unitate incipientium; ecce autem gradus quibus ad meam solutionem adductus sum, quam ilico trado quod modus solutionis quo utor sit longe diversus ab eo quem *Stirlingius* adhibuit, quo fiet ut suspicio a me aberit me voluisse actum agere.

P R O B L E M A I.

Oporteat igitur invenire Logarithmum factorum $\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$ &c. ad tot terminos Pergentium quot designentur per $\overline{m-1}$, siue invenienda sit summa logarithmorum numerorum 1, 2, 3, 4, &c. quorum multitudo sit $\overline{m-1}$.

S O L U T I O.

Pro $\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$ &c. scribe $\frac{m}{m-1} \times \frac{m}{m-2} \times \frac{m}{m-3} \times \frac{m}{m-4}$ &c. cujus si logarithmus inveniatur, tum is subtrahatur a logarithmo quantitatis m^{m-1} , relinquetur id quod quaesitum erat.

T A B U L A I.

$$\text{Porro, Log. } \frac{m}{m-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2mm} + \frac{1}{3m^2} + \frac{1}{4m^3} + \frac{1}{5m^4} \text{ &c.}$$

$$\text{Log. } \frac{m}{m-2} = \frac{2}{m} + \frac{4}{2mm} + \frac{8}{3m^2} + \frac{16}{4m^3} + \frac{32}{5m^4} \text{ &c.}$$

$$\text{Log. } \frac{m}{m-3} = \frac{3}{m} + \frac{9}{2mm} + \frac{27}{3m^2} + \frac{81}{4m^3} + \frac{243}{5m^4} \text{ &c.}$$

$$\text{Log. } \frac{m}{m-4} = \frac{4}{m} + \frac{16}{2mm} + \frac{64}{3m^2} + \frac{256}{4m^3} + \frac{1024}{5m^4} \text{ &c.}$$

Jam Series has omnes quorum multitudo est finita, quippe quæ designetur quantitate $\overline{m-1}$, numerus vero terminorum infinitus, distribuo in Series alias quarum multitudo sit infinita, numerus vero terminorum finitus, nempe aequalis numero $\overline{m-1}$, Seriebus erectis in transversas mutatis & vice versa, scribo igitur.

T A B U L A II.

$$\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \frac{3}{m} + \frac{4}{m} + \frac{5}{m} \text{ --- } \frac{m-1}{m}$$

$$\frac{1}{2mm} + \frac{4}{2mm} + \frac{9}{2mm} + \frac{16}{2mm} + \frac{25}{2mm} \text{ --- } \frac{m-1^2}{2mm}$$

$$\frac{1}{3m^2} + \frac{8}{3m^2} + \frac{27}{3m^2} + \frac{64}{3m^2} + \frac{125}{3m^2} \text{ --- } \frac{m-1^3}{3mm}$$

$$\frac{1}{4m^3} + \frac{16}{4m^3} + \frac{81}{4m^3} + \frac{256}{4m^3} + \frac{625}{4m^3} \text{ --- } \frac{m-1^4}{4m^4}$$

&c.

Ergo

Ergo res eo loci adducta est, ut summæ potestatum numerorum naturalium sumendæ sint, quas ut facilius assequamur, hic subijcimus Tabulam Jac. Bernoulli, e qua ante tantum decerpseramus quantum ad propositum nostrum pertinebat.*

Sic c index Potestatis, l multitudo terminorum quorum summa requiritur, sit etiam f, l^c designatio summæ huic indici competentis, quibus positæ, summæ erunt ut sequitur.

SUMMÆ POTESTATUM.

T A B U L A III.

$$f, l = \frac{1}{2} ll + \frac{1}{2} l$$

$$f, l^2 = \frac{1}{3} l^3 + \frac{1}{2} ll + \frac{1}{6} l$$

$$f, l^3 = \frac{1}{4} l^4 + \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{4} ll$$

$$f, l^4 = \frac{1}{5} l^5 + \frac{1}{2} l^4 + \frac{1}{3} l^3 + \frac{1}{30} l$$

$$f, l^5 = \frac{1}{6} l^6 + \frac{1}{2} l^5 + \frac{5}{12} l^4 + \frac{1}{12} ll$$

$$f, l^6 = \frac{1}{7} l^7 + \frac{1}{2} l^6 + \frac{1}{2} l^5 + \frac{1}{6} l^4 + \frac{1}{42} l$$

$$f, l^7 = \frac{1}{8} l^8 + \frac{1}{2} l^7 + \frac{7}{12} l^6 + \frac{7}{24} l^4 + \frac{1}{12} ll$$

$$f, l^8 = \frac{1}{9} l^9 + \frac{1}{2} l^8 + \frac{2}{3} l^7 + \frac{7}{15} l^5 + \frac{2}{9} l^3 + \frac{1}{30} l$$

$$f, l^9 = \frac{1}{10} l^{10} + \frac{1}{2} l^9 + \frac{3}{4} l^8 + \frac{7}{10} l^6 + \frac{1}{2} l^4 + \frac{3}{20} ll$$

$$f, l^{10} = \frac{1}{11} l^{11} + \frac{1}{2} l^{10} + \frac{5}{6} l^9 + 1 l^7 + 1 l^5 + \frac{1}{2} l^3 + \frac{5}{60} l$$

Ec.

Ut vero hanc Tabulam sub una Formula vir Clarissimus complecteretur, sequentia subjunxit.

“Sumpta c pro potestatis cujlibet exponente, sit summa omnium l^c ,

$$\text{“ seu } f, l^c = \frac{1}{c+1} l^{c+1} + \frac{1}{2} l^c + \frac{c}{2} Al^{c-1} + \frac{c^2-1 \cdot c-2}{4} Bl^{c-3}$$

$$\text{“ } + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} Cl^{c-5} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} Dl^{c-7}$$

“ Ec. & ita deinceps, exponentem potestatis continue minuendo binario, quo usque perveniat ad l vel ll ; Literæ Capitales $A, B,$

“ C, D

* Vide Miscellanea Analytica, pag. 126 & 127. Tab. 2. et 3. sup. jam factas.

"C, D $\mathcal{C}_c$ ordine denotant coefficientes ultimum terminorum
 "pro f, l, f, l^2, f, l^3 $\mathcal{C}_c$. nempe $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}$

" $D = -\frac{1}{30}$. Sunt autem hi coefficientes ita comparati, ut singuli cum
 "suis ordinis coefficientibus complere debeant unitatem; sic D dici-
 "mus valere $-\frac{1}{30}$, quia $\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{15} (-D) = \frac{1}{30} = 1$.

Haecenus Vir Cl. His addi potest quantitates A, B, C, D, E $\mathcal{C}_c$.
 commodius fortan alias ex aliis deductum ita, ad hunc modum

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{4}{2} A = -\frac{1}{30}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{6}{2} A - \frac{5.5.4}{2.3.4} B = \frac{1}{42}$$

$$D = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{8}{2} A - \frac{8.7.6}{2.3.4} B - \frac{8.7.5.4}{2.3.4.5.6} C = -\frac{1}{30}$$

$$E = \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{10}{2} A - \frac{10.9.8}{2.3.4} B - \frac{10.9.8.7.6}{2.3.4.5.6} C - \frac{10.9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6.7.8} = \frac{5}{66}$$

$\mathcal{C}_c$.

Harum vero quantitatum generatio, cum sit per se satis conspicua,
 explanatione non indiget.

Ergo cum Tabula nostra secunda possit converteri in sequentem al-
 teram.

T A B U L A IV.

$$\frac{1}{2} l - \frac{1}{2} l$$

$$\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{2} l - \frac{1}{6} l$$

$$2 m - \frac{1}{2} l - \frac{1}{6} l$$

$$\frac{1}{4} l^3 - \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} l$$

$$3 m^2 - \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} l$$

$$\frac{1}{5} l^4 - \frac{1}{4} l^3 - \frac{1}{5} l^2 - \frac{1}{5} l$$

$$4 m^3 - \frac{1}{4} l^3 - \frac{3}{5} l^2 - \frac{1}{5} l$$

$\mathcal{C}_c$.

Paret eam etiam converteri posse in hanc novam, cujus Series transver-
 eadem sunt quae Series erectae Tabulae proxime superioris nulla a-
 lia

lia mutatione inducta in terminos serierum quæ primas binas sequuntur, quam ut communis celsæque termini multiplicator cuique Seriei præfigatur.

T A B U L A V.

$$\begin{aligned}
 m & \text{ in } \frac{1}{2} \times \frac{11}{mm} + \frac{1}{6} \times \frac{l^2}{m^2} + \frac{1}{12} \times \frac{l^3}{m^3} + \frac{1}{20} \times \frac{l^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 \frac{1}{2} l & + \frac{1}{4} \frac{11}{mm} + \frac{1}{6} \times \frac{l^2}{m^2} + \frac{1}{12} \times \frac{l^3}{m^3} + \frac{1}{10} \times \frac{l^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 A & \text{ in } \frac{1}{m} + \frac{11}{mm} + \frac{l^2}{m^2} + \frac{l^3}{m^3} + \frac{l^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 B & \text{ in } \frac{31}{m} + \frac{611}{mm} + \frac{101^2}{m^2} + \frac{151^3}{m^3} + \frac{211^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 C & \text{ in } \frac{51}{m} + \frac{1511}{mm} + \frac{351^2}{m^2} + \frac{701^3}{m^3} + \frac{1261^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 D & \text{ in } \frac{71}{m} + \frac{2811}{mm} + \frac{841^2}{m^2} + \frac{2101^3}{m^3} + \frac{4621^4}{m^4} \text{ & c.} \\
 7 \times 8 m^7 & \text{ in } \frac{71}{m} + \frac{2811}{mm} + \frac{841^2}{m^2} + \frac{2101^3}{m^3} + \frac{4621^4}{m^4} \text{ & c.}
 \end{aligned}$$

Ex his Seriebus, primæ binæ sunt logarithmicæ, reliquæ omnes summari possunt per quantitates rationales.

Jam vero si ponatur $\frac{1}{m} = x$, series prima evadet

$$m \text{ in } \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{20}x^4 \text{ & c.}$$

cujus summa inventa fuerat in libro nostro Pag. 110, sed habet aliqua repetere ex iis quæ ante dicta fuerant.

Sumatur Series $x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \text{ & c.}$ qua designatur

Logarithmus Hyperbolicus quantitatis $\frac{1}{1-x}$; pone hanc seriem $= v$, multiplicemus nunc pars utraque Aequationis per x , erit igitur

$$xx + \frac{1}{2}x^2x + \frac{1}{3}x^3x + \frac{1}{4}x^4x \text{ & c.} = vx, \text{ hinc erit}$$

$$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 \text{ & c.} = F.vx, \text{ sic } F.v \cdot v \cdot x = vx - q,$$

prodit igitur $q = \frac{xx}{1-x} = -x + v$, quapropter $F.vx = vx - x + v$,

at

at vero x posita fuerat $= \frac{1}{m}$, ac præterea $l = m - 1$, sequitur ergo quantitates $vx + x - v$ mutatum iri in $\frac{m-1-\log m}{m}$, quæ fractio si multiplicetur per m , inveniatur summa primæ Seriei $= m - 1 - \log m$.

Secunda Series, posita ut ante $\frac{1}{m} = x$, evadet

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \&c. = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \log m$$

Hinc Series primæ binæ, inter se conjunctæ, consicient summam $m - 1 - \frac{1}{2} \log m$.

Tertia Series, cum sit progressio geometrica, facile percipietur esse $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{m} - 1$, at vero $A = \frac{1}{6}$, quamobrem summa tertiæ seriei evadet $\frac{1}{12} - \frac{1}{12m}$.

Tertia Series, si seponatur multiplicator ejus communis, tum ei præfigatur unitas, atque ponatur $\frac{1}{m} = x$, evadet $1 + 3x + 6xx + 15x^3 + 21x^4 \&c.$ cujus summa erit $\frac{1}{1-x^5} = m^5$, quapropter, si ex hac

summa resecetur unitas, tum restituatur communis multiplicator

$$\frac{B}{3 \times 4m^5} \text{ sive } - \frac{1}{360m^5}, \text{ summa quartæ Seriei reperietur}$$

$$\text{esse} = - \frac{1}{360} + \frac{1}{360m^5}.$$

Eodem modo summa quintæ Seriei reperietur $= \frac{1}{1260} - \frac{1}{1260m^5}$,

$$\text{itemque summa sextæ} = - \frac{1}{1680} + \frac{1}{1680m^7}.$$

Ex Superioribus perspicuum est tot summas assequi licere quot libitum erit.

Jam ex ante demonstratis, si totum illud subtrahatur ex logarithmo quantitatis m^{m-1} , sive ex $\frac{1}{m-1} \log m$, quod relinquatur, nempe,

$$\begin{aligned}
& \frac{m-1}{2} \log. m \\
& + 1 - m \\
& - \frac{1}{12} + \frac{1}{12m} \\
& + \frac{1}{360} - \frac{1}{360m^3} \\
& - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1260m^5} \\
& + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1680m^7}
\end{aligned}$$

Ec.

exprimet logarithmum Hyperbolicum quantitatis $\frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-3}{2} \times \frac{m-4}{2} \dots 1$.

COROLLARIUM I.

Series $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680}$ Ec. quæ satis commode convergit in principio, post terminos quinque primos convergentiam amittit, quam tamen postea recuperat; sed cum necesse foret eam ad terminos nimis multos perducere ut valor ejus satis accurate definiri posset, melius erit hunc valorem elicere ut sequitur.

Finge logarithmum unitatis requiri, tunc posita $m-1=1$, seu $m=2$. Series duplex, qua summa logarithmorum exprimitur, evadet

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \log. 2 - 2 + \frac{1}{12 \times 2} - \frac{1}{360 \times 8} + \frac{1}{1260 \times 32} - \frac{1}{1680 \times 128} \text{ Ec.} \\
& + 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \text{ Ec.}
\end{aligned}$$

Sed totum illud æquale est nihilo, est enim $\log. 1=0$, qua propter

$$\begin{aligned}
& \text{Series } 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \text{ Ec. in hanc alteram mutabitur} \\
& 2 - \frac{3}{2} \log. 2 - \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{360 \times 8} - \frac{1}{1260 \times 32} + \frac{1}{1680 \times 128} \text{ Ec.} \\
& \text{quæ tolerabilius convergit.}
\end{aligned}$$

Ad si id fingatur requiri ut assignetur summa novem logarithmorum, erit $m-1=9$, seu $m=10$. unde nascetur hæc conclusio

Mm

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \quad \&c. = \log. 5040 \times 72 - 9\frac{1}{2} \log. 10 +$$

$$10 - \frac{1}{12.10} + \frac{1}{360.10^3} - \frac{1}{1260.10^5} + \frac{1}{1680.10^7} \quad \&c. \quad \text{quarum Series}$$

rum posterior citissime convergit.

COROLLARIUM II.

Quantitates omnes $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \quad \&c.$ in infinitum usque pergentes procreant logarithmum Hyperbolicum circumferentiae Circuli cujus Radius est Unitas, hoc vero mihi occupato, in foliis quibusdam libri mei ad prelorem perambulans, perspectum fuerat, non ante tamen quam *Stirlingius* mihi misisset eam Solutionem de media Coefficiente Binomiali quam rogatu meo huic Libro interponi passus est, quapropter libenter fateor Solutionem *Stirlingianam* magna ex parte mihi causam fuisse id percipiendi.

Invenerat utique *Stirlingius* rationem mediam in potestate per magna designata per n esse $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$, posita scilicet p aequali circumferentiae Circuli ad Radium 1, quanquam vero haec media ratio, aliter ab eo expressa fuerit nempe quantitate $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2n+1}}$, utraque expressio eodem recidere compertur, quapropter si statuatur esse n index potestatis infinitae media illa ratio designabitur per $\frac{1}{\sqrt{p}}$.

Ego autem inveneram, Logarithmum mediae rationis in potestate permagna esse fere aequalem logarithmo quantitatis $\frac{2 \times n - 1}{n^2 \sqrt{n-1}}$ + quantitatibus $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \quad \&c.$ qua perinde ac logarithmi habendae sunt; observaram praeterea quantitatem $\frac{n-1}{n^2}$ seu

$1 - \frac{1}{n}$ esse fere quantitatem datam, utpote quae sit proxime aequalis Seriesi infinitae $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \quad \&c.$ qua numerus respondens logarithmo hyperbolico -1 exhibetur, ergo in potestate insuante magna, logarithmus mediae rationis erit $\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360}$

$+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$ &c. at ex expressione *Stirlingiana*, logarithmus mediae hujus rationis est $\log. \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \log. p$, proinde Series infinita

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{560} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1456} &c. \text{ aequalis est dimidio logarithmo Hyperbolico Circumferentiae Circuli cujus Radius est unitas.}$$

Quo circa summa logarithmorum numerorum naturalium ab unitate incipientium, quorumque multitudo designatur per $m-1$, sic exprimi poterit

$$m - \frac{1}{2} \log. m + \frac{1}{2} \log. p - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7}$$

&c.

Probe notandum est hos logarithmos esse hyperbolicos, quo fit ut si de logarithmis tabularibus agitur, in duobus primis terminis logarithmi tabulares sint usurpandi, reliquae vero quantitates multiplicari debeant in numerum 0.43429448190325 &c.

Porro commodum erit rem exponere more *Newtoniano* designatis scilicet iis terminis, qui primo binas sequuntur, per Capitales P, Q, R, S , &c. hinc fiet ut si numerus 0.43429 &c. ponatur $= r$. formula superius allata in hanc mutari possit

$$m - \frac{1}{2} \log. m + \frac{1}{2} \log. p - rm + \frac{r^2}{12m} - \frac{r^3}{360m^3} + \frac{r^4}{1260m^5} - \frac{r^5}{1680m^7} &c.$$

ne vero quis detur ambiguitati locus, monendum cenfeo signo terminorum antecedentium non includi in valore Capitalium; quod attingit quantitatem $\frac{1}{2} \log. p$, ea ad logarithmum Tabularem redacta erit 0.3990899341775 &c.

Ex iis quae ante dicta sunt, non difficile videbitur formulam exhibere, quae complectatur summas logarithmorum tot factorum intervallo dato inter se distantium, quot quis assignare voluerit.

PROBLEMA II.

Requiratur ergo ut inveniantur summa logarithmorum, factorum $m-d \times m-2d \times m-3d \times m-4d \times m-5d$ &c. quorum differentia sit d multitudo l.

M m 2

SOLUTIO.

S O L U T I O.

Summe Logarithmos factorum $\frac{m}{m-d} \times \frac{m}{m-2d} \times \frac{m}{m-3d} \times \frac{m}{m-4d} \times \frac{m}{m-5d}$
 &c. quorum si summam inveneris, tum subtraxeris a logarithmo
 quantitatis m' hoc est ab $l \log. m$, obtinebis quaesitum; cum vero
 solutionis ratio quam in superiore Problemate adhibuimus, huic e-
 tiam Problemati accommodari possit, nihil magis ad solutionem de-
 sideratam requiretur, quam ut ea diligenter attendantur quæ ante dis-
 fuerunt, & ut Tabulæ superiores in sequentes, suo quæque ordine,
 singulæ in singulas convertantur.

T A B U L A I.

$$\begin{aligned} \text{Log. } \frac{m}{m-d} &= \frac{d}{m} + \frac{dd}{2mm} + \frac{d^3}{3m^3} + \frac{d^4}{4m^4} + \frac{d^5}{4m^5} \text{ &c.} \\ \text{Log. } \frac{m}{m-2d} &= \frac{2d}{m} + \frac{4dd}{2mm} + \frac{8d^3}{3m^3} + \frac{16d^4}{4m^4} + \frac{32d^5}{4m^5} \text{ &c.} \\ \text{Log. } \frac{m}{m-3d} &= \frac{3d}{m} + \frac{9dd}{2mm} + \frac{27d^3}{3m^3} + \frac{81d^4}{4m^4} + \frac{243d^5}{4m^5} \text{ &c.} \\ \text{Log. } \frac{m}{m-4d} &= \frac{4d}{m} + \frac{16dd}{2mm} + \frac{64d^3}{3m^3} + \frac{256d^4}{4m^4} + \frac{1024d^5}{4m^5} \text{ &c.} \end{aligned}$$

T A B U L A II.

$$\begin{aligned} d &+ \frac{2d^2}{m} + \frac{3d^3}{m} + \frac{4d^4}{m} \text{ --- } \frac{1d^5}{m} \\ dd &+ \frac{4dd}{2mm} + \frac{9dd}{2mm} + \frac{16dd}{2mm} \text{ --- } \frac{11dd}{2mm} \\ d^3 &+ \frac{8d^3}{3m^3} + \frac{27d^3}{3m^3} + \frac{64d^3}{3m^3} \text{ --- } \frac{1^3d^3}{3m^3} \\ d^4 &+ \frac{16d^4}{4m^4} + \frac{81d^4}{4m^4} + \frac{256d^4}{4m^4} \text{ --- } \frac{1^4d^4}{4m^4} \\ \text{&c.} & \end{aligned}$$

T A B U L A

T A B U L A III.

$$f. Td = \frac{1}{2} lld + \frac{1}{2} ld$$

$$f. lldd = \frac{1}{3} l^3 dd + \frac{1}{2} lldd + \frac{1}{6} lld$$

$$f. l^3 d = \frac{1}{4} l^4 d + \frac{1}{2} l^3 d + \frac{1}{4} lld$$

$$f. l^4 d = \frac{1}{5} l^5 d + \frac{1}{2} l^4 d + \frac{1}{3} l^3 d + \frac{1}{30} lld$$

Ec.

T A B U L A IV.

$$\frac{1}{2} lld + \frac{1}{2} ld$$

$$\frac{1}{3} l^3 dd + \frac{1}{2} lldd + \frac{1}{6} lld$$

$$\frac{1}{4} l^4 d + \frac{1}{2} l^3 d + \frac{1}{4} lld$$

$$\frac{1}{5} l^5 d + \frac{1}{2} l^4 d + \frac{1}{3} l^3 d + \frac{1}{30} lld$$

Ec.

T A B U L A V.

$$l^3 \frac{m}{d} \text{ in } \frac{1}{2} lldd + \frac{1}{6} l^3 d + \frac{1}{12} l^4 d + \frac{1}{20} l^5 d \quad \text{Ec.}$$

$$2^2 \frac{1}{2} ld + \frac{1}{4} lldd + \frac{1}{6} l^3 d + \frac{1}{8} l^4 d + \frac{1}{10} l^5 d \quad \text{Ec.}$$

$$3^2 \frac{Ad}{2m} \text{ in } \frac{ld}{m} + \frac{lldd}{mm} + \frac{l^3 d}{m^2} + \frac{l^4 d}{m^3} \quad \text{Ec.}$$

$$4^2 \frac{Bd}{3 \times 4m^3} \text{ in } \frac{3ld}{m} + \frac{6lldd}{mm} + \frac{10l^3 d}{m^2} + \frac{15l^4 d}{m^3} \quad \text{Ec.}$$

$$5^2 \frac{Cd}{5 \times 6m^5} \text{ in } \frac{5ld}{m} + \frac{15lldd}{mm} + \frac{35l^3 d}{m^2} + \frac{70l^4 d}{m^3} \quad \text{Ec.}$$

Ec.

Iff.

His positis, perspicuum est posse, subsidio eorundem summationum quibus ante usi sumus, has conclusiones deduci, summas serierum Tabulae proxime superioris ordine sumptas sic exhibiturur

$$\text{Summa } 1^{\text{a}} l + \frac{ld - m}{d} \log \frac{m}{m - ld}$$

$$2^{\text{a}} \quad \frac{1}{2} \log \frac{m}{m - ld}$$

$$3^{\text{a}} \quad \frac{Ad}{2m} \times \frac{m}{m - ld} - 1$$

$$4^{\text{a}} \quad \frac{Bd^2}{3 \times 4m^2} \times \frac{m^2}{m - ld^2} - 1$$

$$5^{\text{a}} \quad \frac{Cd^3}{5 \times 6m^3} \times \frac{m^3}{m - ld^3} - 1$$

$$6^{\text{a}} \quad \frac{Dd^4}{7 \times 8m^4} \times \frac{m^4}{m - ld^4} - 1$$

Ec.

Sed $m - ld$ est ultimus terminus progressionis arithmetice decrecentis, $m - d, m - 2d, m - 3d, m - 4d$ &c. nam numerus terminorum in hac investigatione positus fuerat $= l$, sit igitur terminus iste ultimus $= a$, hinc fiet ut l futurus sit $= \frac{m - a}{d}$, quapropter si fiat substitutio, nam

series omnes subducantur ab $l \times \log m$, hoc est ab $\frac{m - a}{d} \log m$, quod relinquitur quaesita satisfaciens, nempe

$$\frac{m - \frac{1}{2}d}{d} \log m - \frac{a - \frac{1}{2}d}{d} \log a - \frac{m - a}{d}$$

$$+ \frac{d}{12} \times \frac{1}{m} - \frac{1}{a}$$

$$- \frac{d^3}{360} \times \frac{1}{m^3} - \frac{1}{a^3}$$

$$+ \frac{d^5}{1260} \times \frac{1}{m^5} - \frac{1}{a^5}$$

$$- \frac{d^7}{1680} \times \frac{1}{m^7} - \frac{1}{a^7}$$

Ec.

Quamquam verò Formula superior ex binis partibus constet quæ uno eodemque tempore gignantur, attamen ad usum accommodatius erit alteram ab altera distrahere, utpote cum prior, quæ majorem habet convergentiæ gradum, pacciores terminos requirat quam posterior; poterit igitur in locum Formule suprapositæ hæc altera substitui, cujus pars posterior e priore est subtrahenda.

$$\begin{aligned} & \frac{m - \frac{1}{2}d}{d} \log. m - \frac{m}{d} + \frac{d}{12m} - \frac{d^2}{360m^2} + \frac{d^3}{1260m^3} - \frac{d^4}{1680m^4} \text{ &c.} \\ & \frac{a - \frac{1}{2}d}{d} \log. a - \frac{a}{d} + \frac{d}{12a} - \frac{d^2}{360a^2} + \frac{d^3}{1260a^3} - \frac{d^4}{1680a^4} \text{ &c.} \end{aligned}$$

PROBLEMA III.

Exvenire Logarithmum rationis quam media Coefficientis Binomii habet ad summam Coefficientium omnium.

Quamquam Logarithmus mediae Coefficientis possit obtineri subsidio. Formulae quæ summæ Logarithmorum exhibentur, vix tamèn hac ratione incidēs in Formulam simplicissimam quæ ad hanc rem est maxime idonea, quapropter liber hic ea subficere quæ de hoc argumento olim à me inecepta, nunc ulterius perducuntur.

S O L U T I O.

Sit igitur $2m$ index potestatis datae, quæ posito Logarithmus mediae rationis sic poterit exprimi.

$$\begin{aligned} & 2m - \frac{1}{2} \log. 2m - 1 + \log. 2 - 2m \log. 2m \\ & + \frac{1}{12} \times 1 - \frac{1}{2m-1} \frac{1}{2} \\ & - \frac{1}{360} \times 1 + \frac{1}{2m-1^3} \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{1260} \times 1 - \frac{1}{2m-1^5} \frac{1}{2} \\ & - \frac{1}{1680} \times 1 + \frac{1}{2m-1^7} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

&c.

Cum

Cum primum huic investigationi operam dederam, lineæ quinae primæ hujus formulæ fuerant a me repertæ, sed non erant ad eam simplicitatem adductæ quam natura rei ferebat, cum enim mihi suscipiendum esset ut invenirem summam Seriei

$$\frac{1}{180m^3} \text{ in } \frac{65s}{m} + \frac{15s^2}{m^2} + \frac{28s^3}{m^3} + \frac{45s^4}{m^4} + \frac{66s^5}{m^5} \text{ &c. quæ ad solu-}$$

tionem Problematis pertinebat, non perceperam hujus seriei Coefficientes continere terminos alternos numerorum tertii ordinis, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 &c. idque eo minus quod unitas ex harum Coefficientium numero excipiebatur, illud quidem inductione mihi constabat, hujus Seriei terminos ad antecedentes referri per constantem relationis scalam, quam nempe inveneram $3-3+1$, sed cum hæc relatio communis sit numerorum tertii ordinis, aliorumque omnium quorum secundæ differentiæ sunt inter se æquales, res ad veram suam originem non revocata fuerat; sed simul ut mihi propius inspicenti, harum terminorum natura perspecta fuit, sic procedere licuit.

Si Binomium $1+\overline{ax}^l$ in seriem expansum dividatur in Series binas quarum utraque ex terminis alternis seriei expansæ consistit, quarumque prior initium sumat a primo termino, posterior a secundo, summa prioris erit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\overline{ax}^l} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\overline{ax}^l}$, summa vero posterioris erit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\overline{ax}^l} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\overline{ax}^l}$, quapropter si series sumanda, seposito communi ejus multiplicatore, factaque $\frac{s}{m} = x$,

consideretur tanquam si esset pars seriei

$1+3x+6xx+15x^2+21x^3+28x^4+36x^5+45x^6$ &c. quæ completi-

tur terminos omnes tertii ordinis, cujus proinde summa erit $1-\overline{x}^4$,

seu $\frac{1}{1-x^4}$, tunc fiet ut summa seriei $1+6xx+15x^2+28x^3$ &c. su-

tura sit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x^4}$; pro x scribe jam $\frac{s}{m}$, seu scribe

$\frac{m-1}{m}$, propterea quod in serie summanda s posita fuerat $=m-1$,*

* Vipe supra pag. 2.

hinc erit $1-x=m$, & $1+x=\frac{2m-1}{m}$, adeoque summa seriei erit

$\frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{2} \times \frac{m^3}{2m-1^3}$, sed unitas ex ea summa debet subtrahi, ut-

potest quæ seriem non ingrediebatur, tum restituendus est communis multiplicator $\frac{1}{180m^3}$ qui sepositus fuerat; quibus factis, summa re-

quiesca tandem evadet $\frac{1}{360} \times 1 + \frac{1}{2m-1^3} - \frac{2}{m^3}$, atque eadem est ratio

de cæteris seriis rationalibus, quæ ad Problema propositum pertinebant.

Sit nunc summa terminorum $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$ &c. in infi-

nitum = s . hanc autem summam ante demonstravimus esse æqualem differentiæ quæ intercedit inter unitatem, & dimidium logarithmum hyperbolicum Circumferentiæ Circuli ad Radium 1; Logarithmus igitur mediæ rationis sic brevius designabitur

$$2m - \frac{1}{2} \log. \frac{2m-1}{2m+1} + \log. 2 - 2m \log. 2m + s$$

$$- \frac{1}{12} \times \frac{2}{m} - \frac{1}{2m-1}$$

$$+ \frac{1}{360} \times \frac{2}{m^3} - \frac{1}{2m-1^3}$$

$$- \frac{1}{1260} \times \frac{2}{m^5} + \frac{1}{2m-1^5}$$

$$+ \frac{1}{1680} \times \frac{2}{m^7} - \frac{1}{2m-1^7}$$

$$\&c.$$

PROBLEMA IV.

Invenire Rationem mediæ Coefficientis Binomii ad Coefficientem quamlibet aliam cujus locus datus sit.

Illud idem hic notari potest quod ad superiorem formulam notavimus, rationem desideratam non ita commode ex formula summarum deductum iri, ac si eam ex formula ad hanc rem aptata deduxerimus.

Sit

Sit igitur $2m$ index potestatis, sit etiam p intervallum inter Coefficientem medianam & Coefficientem desideratam, quibus positis, Logarithmus rationis desideratæ sic exprimitur.

$$\begin{aligned}
 & \frac{m+p}{m+p-\frac{1}{2}} \log \frac{m+p-1+m-p+\frac{1}{2}}{m+p-1-2m \log \frac{m+p}{m}} \\
 & + \frac{1}{12} \times \frac{1}{m+p-1} + \frac{1}{m-p+1} - \frac{2}{m} \\
 & - \frac{1}{360} \times \frac{1}{m+p-1^3} + \frac{1}{m-p+1^3} - \frac{2}{m^3} \\
 & + \frac{1}{1260} \times \frac{1}{m+p-1^5} + \frac{1}{m-p+1^5} - \frac{2}{m^5} \\
 & - \frac{1}{1680} \times \frac{1}{m+p-1^7} + \frac{1}{m-p+1^7} - \frac{2}{m^7}
 \end{aligned}$$

Ecce.

Ex superiore Formula perspicuum est, si m fuerit magnus numerus nec designarit p intervallum nimis magnum, tunc primam lineam satis commode expressuram id quod requirebatur, atque hoc quidem ipsum in libro nostro monitum fuerat, quippe cum usus cui hæc speculatio accommodatur vix quidquam amplius desideret, etenim sit $2m = 900$, $p = 30$, tunc si adhibeantur primæ tres lineæ formulæ superscriptæ, logarithmus rationis desideratæ reperietur esse 0.868266977552, at si prima linea servetur, reliquæ negligantur, logarithmus iste reperietur = 0.8682663.

C O R O L L A R I U M.

Si ponatur $p = m$, tunc ex formula proxime posita, obtinebitur logarithmus medię Coefficientis ad Unitatem, e quo si postea subducatur $\log. 2^m$ seu $2m \log. 2$, quod relinquitur exprimet logarithmum medię rationis, at si ponatur $p = 0$, obtinebitur logarithmus ejus rationis quam media Coefficientis habet ad se ipsam, hoc est logarithmus Unitatis, qui cum sit nihilò æqualis, consequens erit ut termini illi omnes ex quibus formula constat, se invicem destruant, quod tamen non ante percipitur quam expressiones logarithmice in Series convertantur.

De summis Fractionum quæ sub receptoæ Potestatibus numerorum naturalium.

Cum in iis recognoscendis quæ de summis logarithmorum scripseram, seriem Bernoullianam de summis potestatum attente considerarem,

rem, mihi succurrit cogitatio posse eandem Seriem ad Potestates reciprocas per Analogiam transferri, ne tamen vage huic conjecturæ nimis fidenter adhererem, libuit rem totam aggredi eadem profusus via qua superiora affectus eram, quo facto mihi in conclusione infra posita acquiescere licuit.

Si detur Series Fractionum $\frac{1}{n^c} + \frac{1}{n+1^c} + \frac{1}{n+2^c} + \frac{1}{n+3^c} \mathcal{E}c.$

quarum summa requiratur, summa erit

$$\frac{1}{c-1 \cdot n^{c-1}} + \frac{1}{2 \cdot n^c} + \frac{1}{2 \cdot n^{c+1}} A * + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^{c+3}} B * + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot n^{c+6}} C * + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot n^{c+7}} D * \mathcal{E}c.$$

Quantitates autem $A, B, C, D \mathcal{E}c.$ hic adhibere eadem sunt atque illæ quas usurparat Jac. Bernoullius in eximio & uberrimo Theoremate suo de summis Potestarum, hæc vero Series hoc habet commodi quod potestates omnes designatæ indicibus $c+2, c+4, c+6, c+8 \mathcal{E}c.$ ex ea sint abstructæ, quo fiet ut eo majorem convergentiæ gradum sit habitura; sic si sumatur $c=2$, summa evadet,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^3} * - \frac{1}{30n^5} * + \frac{1}{42n^7} * - \frac{1}{30n^9} * + \frac{5}{60n^{11}} \mathcal{E}c. \text{ at si sumatur } c=3. \text{ summa evadet}$$

$$\frac{1}{2nn} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^5} * - \frac{1}{12n^7} * + \frac{1}{12n^9} * - \frac{3}{20n^{11}} * + \frac{5}{12n^{13}} \mathcal{E}c.$$

* Si detur Series fractionum

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \dots \dots \dots \frac{1}{n+i} \text{ quarum prima sit } \frac{1}{n}, \text{ ultima } \frac{1}{n-i}, \text{ summa erit}$$

$$\text{Log. } \frac{a}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2nn} A * + \frac{1}{4n^3} B * + \frac{1}{6n^5} C * + \frac{1}{8n^7} D \mathcal{E}c.$$

$$- \frac{1}{2a} - \frac{1}{2aa} A * - \frac{1}{4a^3} B * - \frac{1}{6a^5} C * - \frac{1}{8a^7} D \mathcal{E}c.$$

Hic duo notanda veniunt, 1^o Symbolum *log.* superscriptum, nolum aliud summa terminum efficere præter primum; 2^o quantitates $A, B, C, D \mathcal{E}c.$ designare numeros Bernoullianos, nempe $A = \frac{1}{6}$
 $B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}, E = \frac{1}{66} \mathcal{E}c.$

N n 2

Eodem

Eodem modo, si derur Series fractionum

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{a-1}}$$

Summa erit

$$-2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}} A * + \frac{5}{64n^3\sqrt{n}} B * + \frac{21}{512n^5\sqrt{n}} C \mathcal{E}c. \\ + 2\sqrt{a} - \frac{1}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{4a\sqrt{a}} A * - \frac{5}{64a^3\sqrt{a}} B * - \frac{21}{512a^5\sqrt{a}} C \mathcal{E}c.$$

Nec difficilius erit summare seriem fractionum

$$\frac{1}{n^e} + \frac{1}{n+d^e} + \frac{1}{n+2d^e} + \frac{1}{n+3d^e} + \frac{1}{n+4d^e} \mathcal{E}c. \text{ nihil enim magis}$$

ad id obinendum requiritur, quam ut termini ex quibus Formula summatur constet, multiplicentur per terminos respondentes seriei $\frac{1}{d}, 1, d, *d^3, *d^5, *d^7 \mathcal{E}c.$ singuli per singulos, exempli causa summa

$$\text{Seriei } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+d} + \frac{1}{n+2d} + \frac{1}{n+3d} + \frac{1}{n+4d} - \dots - \frac{1}{a-d} \mathcal{E}c. \\ \text{reperietur esse}$$

$$\frac{1}{d} \log. \frac{a}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{d}{2nn} A * + \frac{d^3}{4n^3} B * + \frac{d^5}{6n^5} C \mathcal{E}c. \\ - \frac{1}{2a} - \frac{d}{2aa} A * - \frac{d^3}{4a^3} B * - \frac{d^5}{6a^5} C \mathcal{E}c.$$

COROLLARIUM.

Summa Seriei $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} + \frac{1}{n+2d} - \frac{1}{n+3d} + \frac{1}{n+4d} - \frac{1}{n+5d} \mathcal{E}c.$ in infinitum continuata, positis $e=2d$, $p=n+d$, erit

$$\frac{1}{e} \log. \frac{p}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{e}{2nn} A * + \frac{e^3}{4n^3} B * + \frac{e^5}{6n^5} C \mathcal{E}c. \\ - \frac{1}{2p} - \frac{e}{2pp} A * - \frac{e^3}{4p^3} B * - \frac{e^5}{6p^5} C \mathcal{E}c.$$

At si illud requiratur ut assignetur summa Seriei

$$\frac{1}{n+d} + \frac{1}{n+2d} + \frac{1}{n+3d} + \frac{1}{n+4d} + \frac{1}{n+5d} \mathcal{E}c. \text{ in infinitum usque}$$

pergentis, atque progredientis secundum potestates quantitatibus indeterminatae, hic quidem numeri *Bernoulliani* deficiunt, sed licet rem assequi

affequi adjumento serierum recurrentium, quod alio loco offendetur; donec vero id fiat, dico summam, facto $\frac{1}{1-v} = v$, fore

$$\begin{aligned} & \frac{v}{n+d} - \frac{d^2v}{n+d \times n+2d} + \frac{2dd^3}{n+d \cdot n+2d \cdot n+3d} - \frac{6d^3v^4}{n+d \cdot n+2d \cdot n+3d \cdot n+4d} \\ & + \frac{24d^4v^5}{n+d \cdot n+2d \cdot n+3d \cdot n+4d \cdot n+5d} - \frac{120d^5v^6}{n+d \cdot n+2d \cdot n+3d \cdot n+4d \cdot n+5d \cdot n+6d} - \dots - \frac{1}{n+6d} \quad \text{Ec.} \end{aligned}$$

Quod si series proposita constitutur ex terminis alternatim affirmativis & negativis, series qua summa exhibetur eadem manebit quæ prius erat, præterquam quod v ponenda sit $= \frac{1}{1-v}$, & signa negativa in affirmativa mutanda sint.

Aliquando in id incidit ut series proposita satis commode summari possit per Expressiones logarithmicas, exempli gratia si detur series in infinitum continuata $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} \quad \text{Ec.}$ pone $l =$ logarithmo hyperbolico numeri binarii; quo posito, summa erit $l - \frac{1}{4}l + \frac{1}{9}l - \frac{1}{16}l + \frac{1}{25}l - \frac{1}{36}l + \frac{1}{49}l - \frac{1}{64}l \quad \text{Ec.}$ in qua quantitates $A, B, C, D \quad \text{Ec.}$ designant numeros *Bernoullianos*. Priusquam his finem faciam, monendum cenfeo. verbum *summa*, quo in superioribus usus sum, non debere stricte accipi ea significatione qua vulgo accipitur, nempe pro summa finita, sed ita restringi oportere, ut nihil magis eo intelligatur, quam mutatio. Seriei lentissime convergentis, in aliam celerissime convergentem, cujus tamen convergentia interdum non prius incipit, quam aliquot ejus termini, more usitato, in summam colligantur.

Tabula Summarum Logarithmica emendata.

Cum Tabula nostra summarum logarithmica quam ex *Briggii Tabulis constructi curaveram*, pluribus vitis laboraveris, hanc idcirco novam exhibeo, quæ talis est, ut ne minimus quidem sit tibi dubitandi locus quin eam summe accuratam reperias; ne autem possit traditas a me Regulas de summis logarithmorum inveniendis, hæc Tabula possit inutilis videri, causam afferam cur suscepta fuerit; primum ut iis satisfaceres qui speculationibus non ita fidunt, quin eas optarint experientia firmatas, deinde ut Calculo quoad fieri possit parceretur, quod fortasse non contemnendum putabitur: ceterum, non æquum est sperare ut summe logarithmorum ex Theoria deductæ, ad plures quam decem vel undecim figuras, cum summis Tabularum consentiant, hoc autem velim intelligi de majoribus summis, cujus rei rationem sibi quisque reddere poterit, modo id attendat, logarithmos non ad certum figurarum numerum restringi, sed multitudinem infinitam figurarum continere, quo circa summe ex Theoria deductæ paulo accuratiores erunt quam summe tabulares.

| | | | | | |
|-----|-----|------------------------|-----|-----|------------------------|
| 10 | ... | 6.55976.30328.7678. | 460 | ... | 1026.82368.84245.7267. |
| 20 | ... | 18.38612.46168.7770. | 470 | ... | 1053.50280.26009.6230. |
| 30 | ... | 32.42366.00749.2572. | 480 | ... | 1080.27422.85779.2496. |
| 40 | ... | 47.91164.50681.5991. | 490 | ... | 1107.13604.49151.6763. |
| 50 | ... | 64.48307.48724.7209. | 500 | ... | 1134.08640.85351.3508. |
| 60 | ... | 81.92017.48493.9024. | 510 | ... | 1161.12355.00246.5923. |
| 70 | ... | 100.07840.50356.8004. | 520 | ... | 1188.24576.93048.6770. |
| 80 | ... | 118.85472.77224.9966. | 530 | ... | 1215.45143.16339.6251. |
| 90 | ... | 138.17193.57900.1086. | 540 | ... | 1242.73896.39114.8380. |
| 100 | ... | 157.97000.36547.1585. | 550 | ... | 1270.10685.12561.5931. |
| 110 | ... | 178.20091.76448.7008. | 560 | ... | 1297.55363.38324.8209. |
| 120 | ... | 198.82539.38472.1977. | 570 | ... | 1325.07790.39038.2121. |
| 130 | ... | 219.81069.31561.4815. | 580 | ... | 1352.67830.30922.0491. |
| 140 | ... | 241.12910.99886.9689. | 590 | ... | 1380.35351.98269.6983. |
| 150 | ... | 262.75689.34109.2616. | 600 | ... | 1408.10228.69662.7898. |
| 160 | ... | 284.67345.62406.8298. | 610 | ... | 1435.92337.95771.1124. |
| 170 | ... | 306.86078.19948.2847. | 620 | ... | 1463.81561.28607.3923. |
| 180 | ... | 329.30297.14247.9393. | 630 | ... | 1491.77784.02119.6951. |
| 190 | ... | 351.98588.98339.3535. | 640 | ... | 1519.80895.14015.3428. |
| 200 | ... | 374.89688.86400.4044. | 650 | ... | 1547.90787.08720.1888. |
| 210 | ... | 398.02458.26149.3624. | 660 | ... | 1576.07355.61385.9540. |
| 220 | ... | 421.35866.95421.3259. | 670 | ... | 1604.30499.62866.2770. |
| 230 | ... | 444.88978.26514.6048. | 680 | ... | 1632.60121.05589.2142. |
| 240 | ... | 468.60936.87056.4794. | 690 | ... | 1660.96124.70260.3147. |
| 250 | ... | 492.50958.63954.6190. | 700 | ... | 1689.38418.13336.1091. |
| 260 | ... | 516.58322.09826.1269. | 710 | ... | 1717.86911.55213.0134. |
| 270 | ... | 540.82361.20667.5295. | 720 | ... | 1746.41517.69081.2925. |
| 280 | ... | 565.22459.20470.1654. | 730 | ... | 1775.02151.70397.9157. |
| 290 | ... | 589.78043.33690.9860. | 740 | ... | 1803.68731.06935.9463. |
| 300 | ... | 614.48580.30437.7387. | 750 | ... | 1832.41175.49371.5144. |
| 310 | ... | 639.33572.32255.0106. | 760 | ... | 1861.19406.82372.5655. |
| 320 | ... | 664.32553.68741.5328. | 770 | ... | 1890.03348.96156.3791. |
| 330 | ... | 689.45087.77060.3828. | 780 | ... | 1918.92927.78485.4396. |
| 340 | ... | 714.70764.37846.5691. | 790 | ... | 1947.88071.07073.5663. |
| 350 | ... | 740.09197.42162.3279. | 800 | ... | 1976.88708.42376.3542. |
| 360 | ... | 765.60022.85067.1998. | 810 | ... | 2005.94771.20741.9152. |
| 370 | ... | 791.22896.82108.4658. | 820 | ... | 2035.06192.47899.6883. |
| 380 | ... | 816.97493.05636.3600. | 830 | ... | 2064.22906.92766.7182. |
| 390 | ... | 842.83506.38337.0506. | 840 | ... | 2093.44850.81552.2793. |
| 400 | ... | 868.80641.41777.2588. | 850 | ... | 2122.71961.92143.1027. |
| 410 | ... | 894.88621.38085.1630. | 860 | ... | 2152.04179.48752.7013. |
| 420 | ... | 921.07182.03166.5465. | 870 | ... | 2181.41444.16819.4477. |
| 430 | ... | 947.36071.70083.7526. | 880 | ... | 2210.83697.98139.1145. |
| 440 | ... | 973.75050.41416.4285. | 890 | ... | 2240.30884.26218.5633. |
| 450 | ... | 1000.23889.09583.9930. | 900 | ... | 2269.82947.61838.1577. |

Addenda Præli E R R A T I S

*Quoniam si ea diligenter attendantur quæ præcepimus, vix ul-
lum futurum sit periculum ne Præli lapsus quæquam in errorem
inducant, attamen optimum factu putavi si eos errores qui, pos-
sibilem librum meum, tum mihi tam quibusdam amicis occurrerunt,
sic corrigendos exhiberem.*

Pag. 2. lin. 4. ab ima pagina, pro $\frac{1}{2}n$ lege n

Pag. 8. lin. 10. pro $\frac{1}{n} - \frac{2}{n}ax$, lege $\frac{2}{n} - \frac{2}{n}ax$

Pag. 9. lin. 3. pro $\frac{1}{n} - \frac{2}{n}ax$, lege $\frac{2}{n} - \frac{2}{n}ax$

Ibid. pro $\frac{1}{n} - \frac{2}{n}bx$, lege $\frac{2}{n} - \frac{2}{n}bx$

Pag. 10. lin. 3. pro $\frac{2a-1 \times m^{n-1} + p^{n-2}}{42^n}$, lege $\frac{2a-1 \times m^{n-1} + p^{n-2}}{42^{2n}}$

Pag. 15. lin. 3. ab ima pagina, pro -22^n , lege -22^{2n}

Pag. 16. lin. 1. pro $\frac{1+22^n+24^n}{42^n}$, lege $\frac{1+22^{2n}+24^n}{42^{2n}}$

Pag. 16. lin. 6. pro $\frac{1+22^n+24^n}{42^n}$, lege $\frac{1+22^{2n}+24^n}{42^{2n}}$

Pag. 16. lin. 12. pro $\sqrt{1+u\sqrt{n-1}}$, lege $\sqrt{1+\sqrt{n-1}}$

Pag. 22. lin. 11. pro $n+1 \times C$, lege $n-1 \times C$

Pag. 24. lin. 13. pro 2^{2n} , lege 2^{2n}

Pag. 31. lin. 23. pro $-mp$, lege $-mnp$

Pag. 44. lin. 13. pro 1, lege 5,

Ibid. pro 2, lege v

Pag. 46. lin. 8. pro $-\frac{CD}{CB}$, lege $-\frac{CD}{DB}$

Pag. 55. lin. 6 & 7. pro minor unitate, lege æqualis unitati

Pag. 83. lin. 3. pro $\frac{42^n-20 \times 42}{42^n}$, lege $\frac{20-42^n \times 42}{42^n}$

Pag. 83. lin. 3. ab ima pagina, pro quantitas, lege quantitas

Pag. 112. lin. 2. ab ima pagina, pro $\frac{x^{n+4}}{2 \times n+4}$, lege $\frac{x^{n+4}}{3 \times n+4}$

Pag. 138. lin. 20 pro quæ, lege quam

Pag. 149. lin. 15. pro quæque lege quaque

Pag. 150. lin. 16 & 17. pro je ne dissimuleray, lege je ne dissimule-

ray pas,

Pag. 167. lin. 18 & 21, pro $n-1$ lege $n+1$.

Ibid. pro $n-2$ lege $n+2$.

Pag. 177. lin. 19. *pro* deducere, *lege* deducere
Pag. 178. lin. 21. *pro* Combinationis, *lege* Combinationes

Pag. 221. lib. 13. *pro* $\frac{1}{2} m d^{p-2}$, *lege* $\frac{1}{2} m d^{p-1}$

Pag. 238. lin. 3. *pro* δB , z ; *lege* δP , z
Pag. 238. lin. 4. *pro* $\frac{2axz}{xz-vv}$, *lege* $\frac{2axz}{xz-vv}$

Pag. 238. lin. 12. *pro* $\frac{2axz}{xz-vv}$, *lege* $\frac{2axz}{xz+vv}$

Pag. 241. lin. 9. *pro* $\frac{m}{\sqrt{vz}}$, *lege* $\frac{m}{\sqrt{vz}}$

Erratum Supplementi.

Pag. 8. lin. 12. *pro* Tertia, *lege* Quarta.

